UNE SPIRALE TRÈS COMPLEXE

*Commentaire : Etude d’une suite d’affixes dont les points forment une spirale.*

On considère un repère orthonormé $\left(O ;\vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour tout entier naturel $n$, on note $M\_{n}$ le point d’affixe $z\_{n}$ tel que :

$$z\_{0}=1 et z\_{n+1}=\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z\_{n}.$$

1) Déterminer la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2) Soit la suite $\left(u\_{n}\right)$ définie pour tout entier naturel $n$ par : $u\_{n}=\left|z\_{n}\right|$.

 a) Démontrer que $\left(u\_{n}\right)$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

 *Indication :* On pourra prouver que le rapport $\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}$ est une constante.

 b) En déduire l’expression de $u\_{n}$ en fonction de $n$.

 c) Que dire de la longueur $OM\_{n}$ lorsque $n$ tend vers $+\infty $ ? Justifier.



3) On considère l’algorithme ci-contre :

 a) Si $P=5$, quelle est la valeur affichée en sortie ?

 b) Même question pour $P=15$.

 c) Dans le contexte de la partie 2, que permet de faire cet algorithme ?

4) Pour la suite, on admet que pour tout entier naturel *n*, on a : $z\_{n}=u\_{n}e^{i\frac{nπ}{6}}$.

 a) Pour quelles valeurs de *n,* le point $M\_{n}$ appartient-il à l’axe des abscisses ? À l’axe des ordonnées ? Justifier.

 b) Démontrer que le triangle $OM\_{n}M\_{n+1}$est isocèle en $M\_{n}$.

 c) Dans le repère orthonormé $\left(O ;\vec{u}, \vec{v}\right)$, placer les points $M\_{n}$ pour $0\leq n\leq 5$.

 Prendre 0,5 cm pour une unité.

 Relier dans l’ordre ces points pour obtenir la spirale.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)