DÉMONSTRATIONS AU PROGRAMME POUR LE BAC S

SUITES

Propriété :
Si q > 1 alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

D1 - Démonstration au programme (exigible BAC) :
Prérequis : Pour tout entier naturel *n*, on a : $(1+a)^n \geq 1+na$ (*inégalité de Bernoulli qui se démontre par récurrence*).
On suppose que $q>1$, alors on peut poser $q=a+1$ avec $a>0$.
$q^n=(1+a)^n \geq 1+na$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$ car $a>0$. Donc par le théorème de comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Théorème de comparaison :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur ℕ.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

D2 - Démonstration au programme (exigible BAC) :
Soit un nombre réel a.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1. On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a<u_n$.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leq v_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1;n_2)$, on a $a<u_n \leq v_n$.

On en déduit que l'intervalle $]a;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1;n_2)$. Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur ℕ.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par *L*.

D3 - Démonstration au programme (non exigible BAC) :
Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un entier p, tel que $u_p > L$. »
- L'intervalle ouvert $]L-1;u_p[$ contient *L*.

Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L-1;u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).
- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n>p$.

Donc si $n>p$, alors $u_n \notin]L-1;u_p[$ (2).
(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.
Et donc la suite (u_n) est majorée par *L*.

Propriétés :
- Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

D4 - Démonstration au programme (non exigible BAC) :
Soit un réel a.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier *p* tel que $u_p > a$.

La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a $u_n \geq u_p$.

Donc pour tout $n > p$, on a $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang *p*, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $\left]a;+\infty\right[$.

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

FONCTIONS

Théorème : Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

D5 - Démonstration de l'unicité au programme (exigible BAC) :
- Démontrons que f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x)f(-x)$.
Pour tout réel x, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)f(-x) + f(x)\left(-f'(-x)\right) \\ &= f'(x)f(-x) - f(x)f'(-x) \\ &= f(x)f(-x) - f(x)f(-x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante.
Comme $h(0) = f(0)f(0) = 1$, on a pour tout réel x : $f(x)f(-x) = 1$.
La fonction f ne peut donc pas s'annuler.

- Supposons qu'il existe une fonction g telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Comme f ne s'annule pas, on pose $k(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$.

$$k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{\left(f(x)\right)^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{\left(f(x)\right)^2} = 0.$$

k est donc une fonction constante.

Or $k(0) = \dfrac{g(0)}{f(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$ donc pour tout x : $k(x) = 1$.

Et donc $f(x) = g(x)$. L'unicité de f est donc vérifiée.

Propriétés : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

D6 - Démonstrations au programme (exigible BAC) :
- Soit la fonction g définie par $g(x) = e^x - x$.

Pour x positif, $g'(x)=e^x-1\geq e^0-1=0$ car la fonction exponentielle est croissante.
Donc la fonction g est croissante sur $\left[0;+\infty\right[$.
On dresse ainsi le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0 +	
$g(x)$	1 ↗	

Comme $g(0)=1$, on a pour tout x, $g(x)\geq 1$. Et donc $g(x)=e^x-x\geq 0$, soit $e^x\geq x$.
D'après le théorème de comparaison des limites, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$.

- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{e^X}=0$.

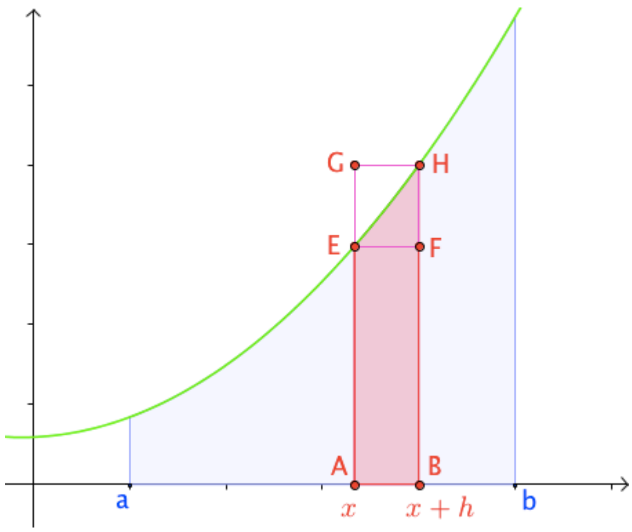
Théorème : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle [a ; b].
La fonction F définie sur [a ; b] par $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur [a ; b] et sa dérivée est la fonction f.

D7 - Démonstration dans le cas où f est strictement croissante (non exigible BAC) :

- On considère deux réels x et $x+h$ de l'intervalle [a ; b] avec $h>0$.

On veut démontrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

$$F(x+h)-F(x)=\int_a^{x+h} f(x)\,dx-\int_a^x f(x)\,dx=\int_x^{x+h} f(x)\,dx.$$



On a représenté ci-contre, la courbe de la fonction f (en vert). Cette différence est égale à l'aire de la surface colorée en rouge.
Elle est comprise entre les aires des rectangles ABFE et ABHG.

Or, $Aire\left(ABFE\right)=h\times f(x)$ et
$Aire\left(ABHG\right)=h\times f(x+h)$.
Comme f est croissante sur [a ; b], on a :
$h\times f(x)<F(x+h)-F(x)<h\times f(x+h)$

Puisque $h>0$, on a : $f(x)<\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}<f(x+h)$.

Comme f est continue sur [a ; b], $\lim\limits_{h\to 0} f(x+h)=f(x)$.

D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$.

- Dans le cas où $h<0$, la démonstration est analogue (les encadrements sont inversés).
On en déduit que $F'(x)=f(x)$.

Propriété : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

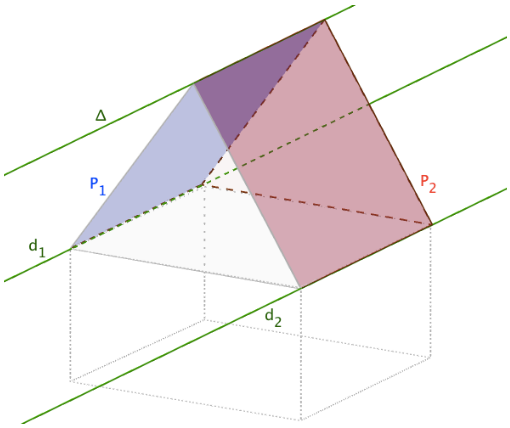
D8 - Démonstration dans le cas d'une fonction admettant un minimum (non exigible BAC) :
Soit f une fonction continue sur un intervalle [a ; b] admettant m comme minimum.
- Si $m \geq 0$: La fonction f est continue et positive sur [a ; b].

Alors la fonction $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est la fonction f.
Comme $F'=f$, on en déduit que f admet bien une primitive sur $[a\,;\,b]$.
- Si $m < 0$: On pose $g(x)=f(x)-m$. La fonction g est continue et positive sur $[a\,;\,b]$.

Alors la fonction $G(x)=\int_a^x g(t)\,dt$ est dérivable sur $[a\,;\,b]$ et sa dérivée est la fonction g.
Soit la fonction F définie par $F(x)=G(x)+mx$ alors $F'(x)=G'(x)+m=g(x)+m=f(x)$.
F est donc une primitive de f sur [a ; b].

GÉOMÉTRIE

Théorème du toit : P_1 et P_2 sont deux plans sécants.
Si une droite d_1 de P_1 est parallèle à une droite d_2 de P_2 alors la droite d'intersection Δ de P_1 et P_2 est parallèle à d_1 et d_2.



D9 - Démonstration au programme (non exigible BAC) :
Les droites d_1 et d_2 sont parallèles et distinctes donc elles sont coplanaires.
On appelle P le plan qui contient d_1 et d_2. On a alors : $P_1 \cap P = d_1$ et $P_2 \cap P = d_2$

Démontrons par l'absurde que Δ est parallèle à d_1.
On suppose donc le contraire, soit : « Δ n'est pas parallèle à d_1. »
On appelle alors A le point d'intersection de Δ et d_1.
- $A \in \Delta$ donc $A \in P_2$
- $A \in d_1$ donc $A \in P$

Donc $A \in P_2 \cap P = d_2$

Or, $A \in d_1$ donc $A \in d_1 \cap d_2$. Ce qui est impossible car d_1 et d_2 sont strictement parallèles.
On arrive ainsi à une contradiction, on en déduit que l'hypothèse fixée au départ « Δ n'est pas parallèle à d_1 » est fausse !
On conclut que Δ est parallèle à d_1 et en conséquence à d_2.

Théorème : Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

D10 - Démonstration au programme (exigible BAC) :
- Si une droite est orthogonale à toute droite d'un plan *P* alors elle est en particulier orthogonale à deux droites sécantes de *P*.
- Démontrons la réciproque :

Soit une droite (d) de vecteur directeur $\vec{n}$ orthogonale à deux droites (d_1) et (d_2) de *P* sécantes et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et orthogonaux au vecteur $\vec{n}$.
Soit une droite quelconque (Δ) de *P* de vecteur directeur $\vec{w}$.
Démontrons que (Δ) est orthogonale à (d).
$\vec{w}$ peut se décomposer en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ qui constituent une base de *P* (car non colinéaires).
Il existe donc deux réels x et y tels que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.
Donc $\vec{w}.\vec{n} = \left(x\vec{u} + y\vec{v}\right).\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = 0$, car $\vec{n}$ est orthogonal avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donc $\vec{n}$ est orthogonal au vecteur $\vec{w}$.
Et donc (d) est orthogonale à (Δ).

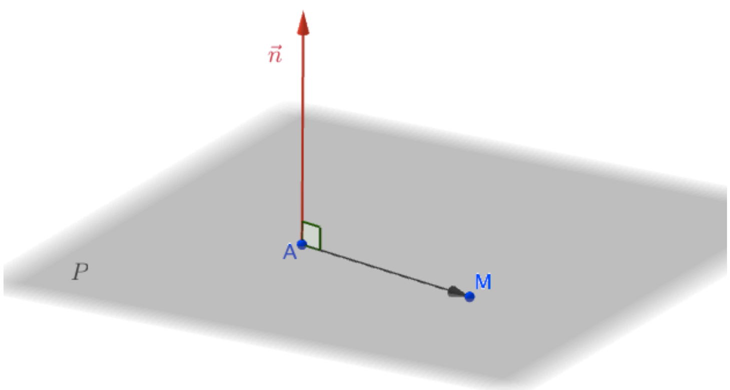
Théorème : L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Un plan *P* de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ non nul admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $ax + by + cz + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$, est un plan.

D11 - Démonstration au programme (exigible BAC) :

- Soit un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ de *P*.



$$M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{n} \text{ sont orthogonaux}$$
$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left(x - x_A\right) + b\left(y - y_A\right) + c\left(z - z_A\right) = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$$
$$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } d = -ax_A - by_A - cz_A.$$

- Réciproquement, supposons par exemple que $a \neq 0$ (a, b et c sont non tous nuls).

On note *E* l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ vérifiant l'équation $ax+by+cz+d=0$

Alors le point $A\left(-\frac{d}{a};0;0\right)$ vérifie l'équation $ax+by+cz+d=0$.

Et donc $A \in E$.

Soit un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Pour tout point $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a :

$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a\left(x+\frac{d}{a}\right)+b\left(y-0\right)+c\left(z-0\right) = ax+by+cz+d=0$.

E est donc l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$.

Donc l'ensemble *E* est le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

PROBABILITÉS

Propriété : Si *A* et *B* sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

D12 - Démonstration au programme (exigible BAC) :

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\cap B) &= P(B\cap \bar{A}) \\ &= P(B)\times P_B(\bar{A}) \\ &= P(B)\times\left(1-P_B(A)\right) \\ &= P(B)\times\left(1-P(A)\right) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= P(B)\times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

Propriété : Soit *X* une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors : $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

D13 - Démonstration au programme (exigible BAC) :

f désigne la densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

La fonction $g: t \mapsto t\,f(t)$ est continue sur tout intervalle $\left[0;x\right]$, avec $x>0$, donc elle admet des primitives sur cet intervalle.

Comme, pour tout réel t positif, on a : $(te^{-\lambda t})' = e^{-\lambda t} - \lambda te^{-\lambda t}$ soit : $t\lambda e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} - (te^{-\lambda t})'$

Ainsi :

$$\int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt = \int_0^x e^{-\lambda t}\,dt - \int_0^x (te^{-\lambda t})'\,dt$$

$$= \left[-\frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}\right]_0^x - \left[te^{-\lambda t}\right]_0^x = \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x}$$

Donc $E(X) = \lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x g(t)\,dt = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} - xe^{-\lambda x}\right) = \frac{1}{\lambda}$

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.
Alors, pour tous réels t et h positifs, on a : $P_{X\geq t}(X \geq t+h) = P(X \geq h)$.

D14 - Démonstration au programme (non exigible BAC) :

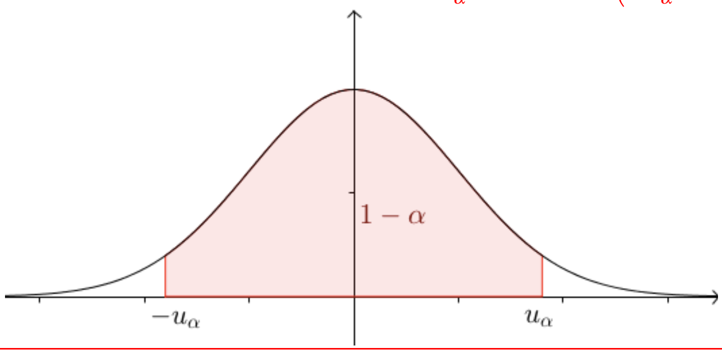
$$P_{X\geq t}(X \geq t+h) = \frac{P\left(\{X \geq t+h\} \cap \{X \geq t\}\right)}{P(X \geq t)} = \frac{P\left(X \geq t+h\right)}{P(X \geq t)} = \frac{1 - P\left(X < t+h\right)}{1 - P(X < t)}$$

Donc : $P_{X\geq t}(X \geq t+h) = \dfrac{1-\left(1-e^{-\lambda(t+h)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)}$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = 1 - \left(1 - e^{-\lambda h}\right) = 1 - P(X < h) = P(X \geq h)$$

STATISTIQUES

Popriété : X est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $N(0;1)$.
Pour tout $\alpha \in \left]0;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P\left(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.



D15 - Démonstration au programme (exigible BAC) :
Par symétrie de la courbe de la fonction densité f, on a :
$P(-t \leq X \leq t) = 2P(0 \leq X \leq t) = 2\int_0^t f(x)\,dx = 2F(t)$ où F est la primitive de f qui s'annule en 0.

La fonction F est continue et strictement croissante sur $\left[0;+\infty\right[$, il en est de même pour la fonction $2F$.

L'aire totale sous la courbe est égale à 1, donc par symétrie, on a : $\lim\limits_{t\to+\infty} \int_0^t f(x)\,dx = \frac{1}{2}$.

Donc $\lim\limits_{t\to+\infty} 2F(t) = 1$.

On dresse le tableau de variations :
Si $\alpha \in \left]0;1\right[$ alors $1-\alpha \in \left]0;1\right[$.

t	0	$+\infty$
$2F(t)$	0 ↗	1

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel u_α de $\left[0;+\infty\right[$ tel que $2F(t)=1-\alpha$. Comme $2F$ est strictement croissante, on en déduit que u_α est unique.

Propriété : Soit $\alpha \in \left]0;1\right[$ et X_n une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n;p)$.
La probabilité que la fréquence F_n prenne ses valeurs dans l'intervalle
$I_n = \left[p-u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\,;\,p+u_\alpha\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ se rapproche de $1-\alpha$ quand la taille de l'échantillon n devient grande. On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} P(F_n \in I_n) = 1-\alpha$.
I_n est appelé intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence F_n au seuil $1-\alpha$.

D16 - Démonstration au programme (exigible BAC) :

X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$ donc la suite de variables aléatoires $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ suit une loi normale centrée réduite $N(0;1)$ et d'après le théorème de Moivre-Laplace, on a :

$\lim\limits_{n\to+\infty} P(a \le Z_n \le b) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$, pout tous réels a et b avec $a < b$ (1).

Or $Z_n = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{n\left(\dfrac{X_n}{n}-p\right)}{n\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} = \dfrac{F_n - p}{\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}}$.

Donc $a \le Z_n \le b$ est équivalent à $a \le \dfrac{F_n - p}{\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \le b$

Soit : $a\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n - p \le b\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

Soit encore : $p + a\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p + b\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$

Donc d'après (1) : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p + a\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p + b\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) = \int_a^b \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

Comme, pour tout réel $\alpha \in \left]0;1\right[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \le X \le u_\alpha) = 1-\alpha$ où X suit une loi normale centrée réduite $N(0;1)$, on a :

$\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1-\alpha$.

En prenant $a = -u_\alpha$ et $b = u_\alpha$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right) = 1-\alpha$.

Propriété : X_n est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale $B(n;p)$.

$F_n = \frac{X_n}{n}$ est la fréquence associée à X_n.

Pour n suffisamment grand, p appartient à l'intervalle $J_n = \left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} ; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

D17 - Démonstration au programme (non exigible BAC) :

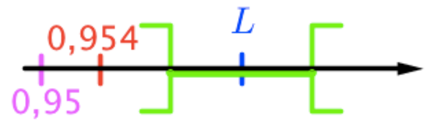
X_n suit la loi binomiale $B(n;p)$ donc la suite de variables aléatoires $Z_n = \frac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)} = \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ tend vers la loi normale centrée réduite $N(0;1)$ (théorème de Moivre-Laplace)

Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(-2 \le Z_n \le 2) = P(-2 \le X \le 2) = L$ où X suit une loi normale centrée réduite.

Et $P(-2 \le X \le 2) \approx 0{,}9544$ (calculatrice), donc L > 0,954

On pose $a_n = P(-2 \le Z_n \le 2)$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ > 0,954.

Tout intervalle ouvert contenant L contient tous les termes de la suite pour n suffisamment grand.



Ainsi, pour n suffisamment grand, on a : $a_n > 0{,}95$.

Donc $P(-2 \le Z_n \le 2) > 0{,}95$. Or :

$$P(-2 \le Z_n \le 2) = P\left(-2 \le \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le 2 \right)$$

$$= P\left(-2\sqrt{np(1-p)} \le X_n - np \le 2\sqrt{np(1-p)}\right)$$

$$= P\left(-2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \le \frac{X_n}{n} - p \le 2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \right)$$

$$= P\left(p - 2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \le \frac{X_n}{n} \le p + 2\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n} \right)$$

$$= P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \le F_n \le p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right)$$

Démontrons que $2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$. Ce revient à démontrer que $\sqrt{p(1-p)} \leq \dfrac{1}{2}$ ou encore que : $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.

La fonction $p \mapsto p(1-p)$ définie sur [0 ; 1] est un trinôme qui possède un maximum en $p = \dfrac{1}{2}$.

Ce maximum est égal à $\dfrac{1}{4}$. Ainsi : $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$ et donc $2\dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On en déduit que :

$$P\left(p - 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + 2\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \leq P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

et donc finalement pour n suffisamment grand, $P\left(p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$.

Or :

$$P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - F_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Donc :

$$P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq 0{,}95$$

Merci à Nadine M. pour sa relecture attentive.