

Chapitre 19

Le développement de la trigonométrie

Préambule

Selon Edward S. KENNEDY¹ [100] [101], la trigonométrie, sans doute plus que toute autre branche des mathématiques, s'est développée grâce à un va-et-vient continu et fertile. Il s'agit en fait d'une offre et d'une demande – offre de théories mathématiques et de techniques utilisables en toutes circonstances et demande pressante d'une science appliquée, l'astronomie. La relation trigonométrie – astronomie fut tellement intime que, jusqu'au treizième siècle, les deux sujets ne formeront qu'une seule entité.

KENNEDY perçoit le même type d'interactions diverses entre théorie et application au sein même de la trigonométrie, si bien que, pour lui, l'histoire de la trigonométrie exhibe, en elle-même, la croissance embryonnaire de trois divisions classiques des mathématiques : l'algèbre, l'analyse et la géométrie.

Les débuts du développement de la trigonométrie se perdent dans la nuit des temps ; on peut considérer qu'au départ, elle a produit les premières suites numériques faisant correspondre une longueur d'ombre à un moment de la journée. Ces concepts, qui ont vu le jour dans des contrées à l'est de la Méditerranée, ont été rapportés par des gens écrivant en grec et se sont bien implantés dans des régions plus occidentales au deuxième siècle de notre ère. Nous verrons que le pôle de l'activité va alors se déplacer en Inde – la fonction « corde » y sera remplacée par plusieurs espèces de fonctions « sinus » – et de là, il retournera en partie vers son lieu d'origine. Entre le neuvième et le quinzième siècle, dans la région s'étendant de la Syrie à l'Asie centrale, la nouvelle fonction sinus et les vieilles fonctions ombres vont être tabulées en sexagésimal. C'est de ce développement qu'émerge vraiment la trigonométrie, en ce sens que l'objet d'étude devient le triangle sphérique ou plan, ses côtés et ses angles. Lorsque le centre d'activité de l'astronomie se déplace en Europe, il en va de même de la nouvelle trigonométrie et les scientifiques européens poursuivent le travail de leurs prédécesseurs orientaux, à savoir le calcul de tables et la découverte de relations fonctionnelles entre les éléments du triangle.

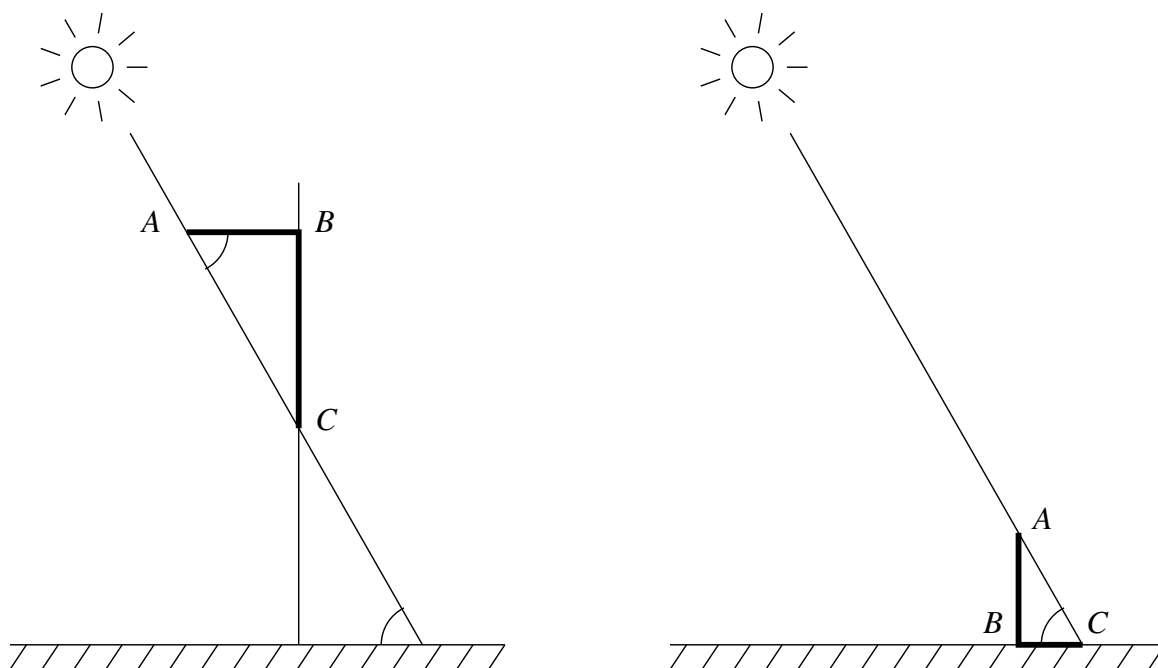
L'invention du calcul infinitésimal, qui n'arrive que plus tard, précipite la fin rapide de la trigonométrie – considérée comme branche indépendante des mathématiques. Avec la naissance et l'exploitation des nombres complexes, la plus grande partie de la théorie est engloutie dans l'analyse. À la fin du dix-huitième siècle, Léonard EULER et d'autres mathématiciens présentent

¹Edward S. KENNEDY est professeur émérite de l'Université américaine de Bayrūt ; il est considéré comme l'un des tout grands spécialistes de l'histoire de l'astronomie en pays d'Islam.

tous les théorèmes de la trigonométrie comme corollaires de la théorie des fonctions complexes. La trigonométrie ne conserve son identité séparée que comme sujet scolaire et comme utilitaire particulièrement apprécié des arpenteurs et navigateurs.

1 Les balbutiements

Très tôt, on trouve les ancêtres légitimes des fonctions « tangente » et « cotangente ». Il s'agit en fait de la mesure de l'ombre d'un bâton ou *gnomon*.



Si le gnomon AB est fixé horizontalement sur un mur vertical, alors son ombre BC (sur le mur) est la tangente de l'angle de visée du soleil, si on prend la longueur du bâton AB pour unité. Dans ces mêmes conditions, si le gnomon est fixé verticalement dans le sol, son ombre BC (sur le sol) est la cotangente de l'angle de visée du soleil.

Otto NEUGEBAUER et Richard PARKER signalent, par exemple, l'existence d'une table dont on peut voir une transcription « en notation moderne » ci-contre. Il s'agit d'une inscription datant du treizième siècle avant Jésus-Christ, découverte à Abydos, en Haute-Égypte. On trouve des documents du même type en Perse, en Inde, en Chine, en Mésopotamie, en Grèce, ... à différentes époques de l'histoire. Ces schémas sont bien sûr naïfs – les longueurs des « heures » qu'ils indiquent sont inégales, la longueur des ombres varie avec la latitude géographique et avec les saisons – mais ils sont cependant les témoins que l'homme utilise explicitement la notion de fonction au moins depuis trois mille ans.

Fin de l'heure	Ombre
2	30
3	18
4	9
5	3
Midi	0

Dans le long cheminement qui mène à la trigonométrie, l'outil de base ne sera pourtant pas l'ombre du gnomon qui débouche plus tard sur la notion de tangente, mais plutôt la fonction « corde », qui s'apparente, comme on le verra, à notre sinus. Son calcul est facilité par un

bon système de numération positionnel ; depuis le deuxième millénaire avant Jésus-Christ, les Mésopotamiens ont développé un tel type de système, qui mélange les bases dix et soixante.

Comme on va le voir, le développement de la trigonométrie est intimement lié aux besoins de l'astronomie, qui fut l'un des sujets d'étude de prédilection en Mésopotamie. C'est là que de nombreuses tables d'observations astronomiques ont été dressées en utilisant le système sexagésimal. On peut raisonnablement conjecturer que ce sont les Grecs de l'époque hellénistique² qui, les premiers, ont calculé des « rapports trigonométriques » mais ils ne disposaient que d'un mauvais système littéral de numération. Ils ont donc effectué les calculs en sexagésimal.

2 D'ARISTARQUE À PTOLÉMÉE

ARISTARQUE DE SAMOS (Ἀρίσταρχος) vivait à l'époque d'EUCLIDE (Εὐκλείδης), époque que l'on peut vraisemblablement situer sous Ptolémée I, roi d'Égypte³ de 323 à 285. Il est astronome et mathématicien. Selon Th. HEATH [80] et G. SARTON [125], on peut, sans nul doute, le considérer comme le premier à défendre l'hypothèse héliocentrique. Il a écrit *Sur les grandeurs et les distances du soleil et de la lune*, traité intéressant du point de vue mathématique car il y calcule des rapports qui sont en fait des rapports trigonométriques.

L'astronome, mathématicien, géographe HIPPARQUE (Ἱππάρχος) exerce l'essentiel de son activité à Rhodes et à Alexandrie, entre les années 160 et 125 av. J.-C. Selon SARTON, il a probablement inventé ou utilisé la projection stéréographique ainsi que certains instruments habituellement attribués à PTOLÉMÉE. Il est en tout cas le premier observateur grec à diviser en 360 degrés les cercles des instruments qu'il utilise⁴. Il réalise un grand nombre d'observations astronomiques très précises, ce qui lui permet de construire le premier globe céleste. Malheureusement il est très conservateur et c'est essentiellement à cause de lui que le système géocentrique continuera à être le plus utilisé. HIPPARQUE peut être considéré comme le fondateur de la trigonométrie, tant sphérique que plane ; il établit une table de la fonction « corde »⁵, ce qui pourrait impliquer qu'il connaissait le théorème dit de PTOLÉMÉE sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, ou... une proposition équivalente. Il critique la géographie d'ÉRATOSTHÈNE (Ἐρατοσθένης) et tente de fixer astronomiquement les positions des lieux sur le globe terrestre par leurs latitudes et longitudes, longitudes qu'il détermine par l'observation des éclipses.

C'est à Rome, vers 98 – à l'époque de PLINE L'ANCIEN –, que le mathématicien, astronome, physicien grec MENELAOS D'ALEXANDRIE (Μενέλαος) réalise des observations. Il a écrit six livres (perdus) sur le calcul des cordes et trois sur les sphériques, qui nous sont parvenus dans des traductions arabes, hébraïques et latines. Ces livres sur les sphériques sont en fait un traité de trigonométrie sphérique ; il est le premier à libérer la trigonométrie de la stéréométrie et de l'astronomie. C'est dans le livre III que l'on trouve le célèbre théorème dit de MENELAOS, relatif

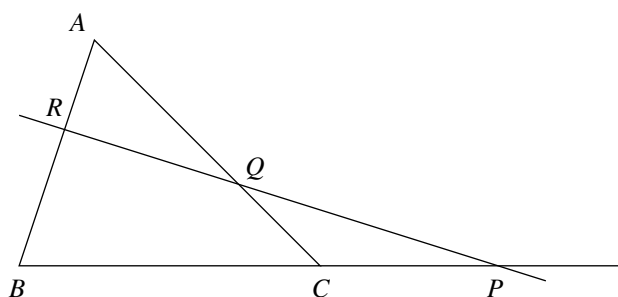
²Rappelons que cette civilisation s'est développée en Orient, de la mort d'Alexandre le Grand (323 av. J.-C.) jusqu'à la conquête romaine par Auguste (27 av. J.-C.) et qu'elle n'était pas limitée au seul territoire grec.

³Ptolémée I est le fondateur de la dynastie des Lagides, seize souverains grecs qui vont régner sur l'Égypte après la mort d'Alexandre le Grand jusqu'en 30 av. J.-C. Il ne faut pas les confondre avec le mathématicien, astronome Claude PTOLÉMÉE, mort en 161 de notre ère.

⁴Une histoire du calendrier n'a pas sa place ici. Nous tenons néanmoins à signaler que la quantité « 360 » est liée aux premières formes de calendrier, comme le babylonien, entre autres, qui comportait douze mois de trente jours ; et on ajustait en fin d'année... C'est sans doute là qu'il faut chercher l'explication de l'utilisation du système sexagésimal.

⁵La fonction « corde d'un angle α » vaut en fait le double du sinus de l'angle $\frac{\alpha}{2}$.

aussi bien aux triangles sphériques qu'aux triangles plans.



C'est une relation entre six quantités, d'où son nom aussi de *regula sex quantitatum*. Avec les notations de la figure ci-contre, ce théorème peut s'énoncer, en trigonométrie plane :

les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{|BP|}{|PC|} \cdot \frac{|CQ|}{|QA|} \cdot \frac{|AR|}{|RB|} = 1.$$

Nous connaissons le traité par plusieurs traductions en arabe qui s'étaleront du neuvième jusqu'à la fin du treizième siècle ; nous en mentionnerons une plus loin. Dans la deuxième moitié du douzième siècle, le texte arabe est traduit en latin par GÉRARD DE CRÉMONE et, environ un siècle plus tard, en hébreu par JACOB BEN MACHIR IBN TIBBON.

Claude PTOLÉMÉE (Πτολεμαῖος), dont le nom est sans doute le plus connu parmi ceux qui jalonnent l'histoire de la trigonométrie, est né en Égypte et exerce son activité à Alexandrie durant le deuxième quart du deuxième siècle de notre ère. Il meurt en 161. Il est astronome, mathématicien, géographe, physicien, « chronologiste ». Son influence – presque comparable à celle d'ARISTOTE – est marquante jusqu'au seizième siècle. Il possède une tournure d'esprit euclidienne et, quoique trois siècles les séparent, on le croirait proche collaborateur d'HIPPARQUE, ce dont il se prévaut la plupart du temps. Son œuvre principale porte le titre de *Traité de mathématiques*, en grec, ἡ μαθηματικὴ σύνταξις ou μεγάλη σύνταξις τῆς ἀστρονομίας, dont la contraction des deux premiers mots a donné, en passant par une traduction en arabe, *Almageste*. Cette encyclopédie de l'astronomie, dont pratiquement tout le contenu est basé sur les travaux d'HIPPARQUE, fait autorité jusqu'en 1543⁶. Les observations personnelles de PTOLÉMÉE s'étalent de 127 à 151, mais selon SARTON, il n'était pas un observateur très fin ; sa contribution principale semble avoir été sa théorie très élaborée des planètes et la découverte d'une deuxième inégalité dans le mouvement périodique de la lune, qu'on appelle de nos jours *évection*. Son système est purement géocentrique ; l'élaboration de la trigonométrie – le remplacement de diagrammes par des calculs – consacre l'astronomie comme discipline mathématique. Le catalogue d'étoiles de PTOLÉMÉE en répertorie 1028 et est probablement fort proche de celui d'HIPPARQUE, mais ce dernier étant perdu, c'est celui de PTOLÉMÉE qui constitue la plus ancienne description précise du ciel, en fait la seule jusqu'au quinzième siècle ; en cela, il est d'une valeur inestimable.

L'*Almageste* contient un très bel exposé des trigonométries plane et sphérique ; en outre, PTOLÉMÉE y explique comment construire une table de cordes, et il en fournit une allant de $\frac{1}{2}^\circ$ à 180° , par pas de $\frac{1}{2}^\circ$. Le théorème dit de PTOLÉMÉE, sur le quadrilatère inscrit dans un cercle, fournit une formule équivalente⁷ à celle qui donne $\sin(a \pm b)$.

Signalons encore que PTOLÉMÉE a tenté de démontrer le cinquième postulat d'EUCLIDE et que son *Traité de géographie*, γηωγραφικὴ ὑφήγησις vient en second sur le plan de l'importance de ses œuvres. Il a influencé les progrès de la géographie presque aussi profondément et longtemps que ne l'a fait l'*Almageste* pour les mathématiques et l'astronomie.

⁶L'année 1543 est ici prise symboliquement ; c'est celle de la mort du fondateur de l'astronomie moderne, Nicolas COPERNIC. En 1530, il avait achevé sa grande œuvre *De Revolutionibus*, dans laquelle il affirmait que la terre tournait autour de son axe en un jour et faisait le tour du soleil en un an.

⁷Ce théorème peut s'énoncer : dans tout quadrilatère inscriptible, la somme des produits des mesures des côtés opposés est égale au produit des mesures des diagonales.

3 La trigonométrie dans le monde indien

Les *siddhānta*, véritables traités théoriques par opposition à des ouvrages de nature plus pratique comme les *karaṇas*⁸ et les tables, sont probablement les plus anciens travaux scientifiques indiens d'astronomie. On en cite souvent cinq, qu'il est impossible de dater avec précision. Il y a cependant assez de différences entre eux pour étayer l'hypothèse qu'ils furent écrits à des époques différentes. SARTON pense qu'on peut plus ou moins dater ces *siddhānta* à partir de la première moitié du cinquième siècle de notre ère.

Seul le premier, le *Sūrya-Siddhānta*, nous est parvenu dans sa forme originale ; on y trouve de nombreuses traces de l'influence grecque, mais on ignore encore par quel canal l'astronomie grecque a pu arriver en Inde. Divisé en quatorze chapitres, il est écrit en *śloka*s⁹.

Selon AL-BĪRŪNĪ (البيروني), mathématicien, astronome arabe mort en 1048, il aurait été écrit par LĀṬĀ, mais il se peut que ce dernier n'ait rédigé que des commentaires sur le *Sūrya-Siddhānta*, comme il l'aurait fait à propos de deux autres *siddhānta*, selon des témoignages de l'époque. Les vers qui introduisent le texte affirment que celui-ci fut écrit par SŪRYA, le Dieu Soleil, à *Romaka* (Rome ?, Alexandrie ?). Les principales théories astronomiques qu'on y trouve sont grecques même si l'auteur a tenté d'y préserver les vieux usages indiens, tout en demeurant cohérent autant que possible.

La caractéristique la plus marquante du traité est l'utilisation du *ḡyā*¹⁰ c'est-à-dire du sinus à la place de la corde. On y rencontre également une des premières mentions du sinus verse¹¹.

Un autre texte, le *Paulīśa-Siddhānta*, peut être considéré comme un des fondements de la trigonométrie indienne. Il introduit la notion de sinus et contient une table de vingt-quatre sinus et sinus verses par pas de 3° 45'. Au départ, le sinus de 3° 45' est supposé égal à son arc, appelé *kramaḡyā* et les autres valeurs de la table sont calculées grâce à une formule de récurrence.

C'est au mathématicien et astronome indien ĀRYABHAṬA, né à *Kusumapura* près de *Pāṭalīputra*, l'actuelle Patna, vers 476, que l'on doit le traité intitulé *Āryabhaṭīya* ou *Laghv-Āryabhaṭīya*, qui représente une sorte de systématisation des résultats contenus dans les *siddhānta*. Il date de l'année 3600 de *Kaliyuga*, ce qui correspond à l'an 499 de notre ère. Il est écrit en vers et divisé en quatre parties :

Daśagītīkāsūtra, système d'écriture des nombres ;

Gaṇitapāda, traité mathématique en 33 stances ;

Kālakriyāpāda, éléments de chronologie astronomique ;

Golapāda, considérations qui concernent les sphères célestes.

Cet ouvrage comporte plusieurs formules concernant les suites arithmétiques, mais également

⁸Les *karaṇas* sont plutôt des manuels d'astronomie pratique qui n'ont pas la prétention d'un véritable traité.

⁹Les *śloka*s sont des vers, souvent écrits en sanskrit. On y trouve généralement une connotation religieuse et une prière dédiée à une déesse ou un dieu particuliers.

¹⁰Lorsque les traducteurs arabes ont rencontré ce mot *ḡyā*, ils l'ont translittéré dans leur alphabet, ce qui donna lieu à une « mauvaise » interprétation. Le mot arabe جيب, *ḡāib*, signifiant entre autres « cavité », en était fort proche du point de vue de l'écriture. Si on ajoute à cela que la langue arabe ne note pas nécessairement la vocalisation brève, on trouve l'explication du fait que le vocable mathématique « sinus » traduction latine du mot arabe *ḡāib* désigne également la cavité nasale, par exemple.

¹¹Le sinus verse d'un angle vaut 1 moins le cosinus de cet angle.

une valeur très précise de π – à savoir $3 \frac{177}{1250} = 3,416$ – ainsi que des tables de sinus et de sinus verses. Les concepts astronomiques sont du même type que dans le *Sūrya-Siddhānta*, excepté le fait qu'ĀRYABHATA enseigne que la rotation journalière du ciel n'est qu'apparente ; elle est due à la rotation de la terre autour de son axe. Cette hypothèse, très osée, ne sera pas admise par des astronomes indiens postérieurs comme par exemple, BRAHMAGUPTA au septième siècle.

4 La trigonométrie dans le monde musulman

Il existait, dans le monde arabe, avant l'Islam, une « astronomie populaire » qui englobait la connaissance des saisons, quelques phénomènes météorologiques, les positions des étoiles fixes, ... Jusqu'au IX^e siècle et même au X^e, ces rudiments, qui ne reposaient sur aucun calcul mais seulement sur l'accumulation des expériences, étaient consignés dans ce qu'on appelait des *Livres des saisons* ou *kutub al-āwina* (كتب الاونة).

L'avènement de l'Islam exige des réponses rapides aux besoins liés à la pratique du culte : connaissance des moments des cinq prières quotidiennes, détermination de la direction de La Mecque ou *qiblā* (القبلة) et fixation du début et de la fin du *ramaḍān* (رمضان). On voit apparaître deux nouveaux types d'ouvrages, d'une part les *kutub al-mawāqīt* (كتب المواقيت) ou livres de détermination des temps (détermination basée sur la technique du gnomon le jour et sur le déplacement de la lune durant la nuit), d'autre part, les *Dalā'il al-qiblā* (دلائل القبلة) ou indicateurs de la direction de La Mecque (techniques fondées sur les levers et couchers astronomiques). En ce qui concerne le *ramaḍān*, le problème est tellement complexe que pendant longtemps, on se contentera d'observer, depuis une élévation (montagne, tertre, ...) et à l'œil nu, l'apparition du croissant de lune.

La religion n'est cependant pas le seul moteur du développement de l'astronomie. Les humains en général, *a fortiori* ceux qui occupent un poste important dans la société, ont toujours éprouvé un « certain besoin » d'avoir des renseignements sur leur avenir ; cela explique le succès que connaît l'astrologie. On peut vraiment considérer que l'astrologie a été un facteur de développement de l'astronomie, en ce sens que l'astrologie astronomique repose effectivement sur le principe énonçant que le monde sublunaire et tous les êtres vivants qui le composent sont soumis aux effets des mouvements des astres.

Un troisième facteur est sans doute le besoin qu'éprouve l'homme de comprendre le monde dans lequel il vit et, par conséquent, de tenter de rechercher les lois qui régissent l'univers, le mouvement des corps célestes, ...

On possède des témoignages du fait que les premiers astronomes de l'Islam ont eu connaissance, bien avant que ne démarre la période de traduction¹², de certains aspects de l'astronomie babylonienne, grecque ou indienne, notamment par le biais de spécialistes syriaques. L'un des très célèbres est, par exemple, l'évêque nestorien Severus SEBOHT, originaire de Nisibe mais qui travaille au cloître de Kenešra dans la haute vallée de l'Euphrate ; en 661, année de la prise du pouvoir par les Umayyades, il écrit un *Traité des constellations*.

Un siècle plus tard, la découverte plus en profondeur de la science indienne va pousser les savants de Bagdad à s'intéresser de très près à l'astronomie. Voici ce qu'on peut lire, dans le

¹²Voir à ce sujet le chapitre 16, à la page 498.

Dictionnaire des savants, de ABŪ-L-ḤASAN AL-QIṬĪ (أبو الحسن القفطي) qui a vécu de 1172 à 1288.

En l'année 156 de l'hégire¹³, il arriva de l'Inde à Bagdād un homme fort instruit dans les doctrines de son pays. Cet homme possédait la méthode du *Sind hind* (سندهند)¹⁴, relative aux mouvements des astres et aux équations calculées au moyen de sinus de quart en quart de degré. Il connaissait aussi diverses manières de déterminer les éclipses, ainsi que le lever des signes du zodiaque. Il avait composé un abrégé d'un ouvrage relatif à ces matières, qu'on attribuait à un prince nommé Figar¹⁵. Dans cet écrit, les *Kardaga*¹⁶ étaient calculées par minutes. Le calife¹⁷ ordonne qu'on traduise le traité indien en arabe, afin d'aider les musulmans à acquérir une connaissance exacte des étoiles. Le soin de la traduction fut confié à MUḤAMMAD, fils de IBRĀHĪM AL-FAZĀRĪ (محمد بن ابراهيم الفزاري), le premier d'entre les musulmans qui s'était livré à une étude approfondie de l'astronomie : on désigna plus tard cette traduction, chez les astronomes, sous le titre de *Grand Sind hind*¹⁸.

On sait, par les astronomes eux-mêmes et non pas par les historiens, que l'astronomie indienne contenait des outils trigonométriques, comme la notion de sinus, que les Arabes vont préférer à celle de corde utilisée par les Grecs. On y trouve également de petites tables fournissant les valeurs des sinus et sinus versés pour des angles donnés, ainsi que des algorithmes de calcul de certains paramètres permettant la constitution de tables astronomiques et des procédés de mesure pour déterminer, par exemple, le méridien en un lieu.

Par contre, les biobibliographes fournissent des informations très pointues sur le contenu, les traductions, ... de l'ensemble des connaissances astronomiques qui viennent du monde grec. Par exemple, il est rapporté que l'*Almageste* de PTOLÉMÉE a d'abord été traduit du syriaque en arabe, dès le huitième siècle, par AL-ḤASAN IBN QURAYŠ (الحسن بن قريث). À la fin de ce même siècle, YAḤYA IBN ḤĀLID AL-BARMAKĪ (يحيى بن خالد البرمكي) ordonne d'en faire une traduction à partir d'un texte grec, mais ce sont finalement deux autres traductions qui vont nous parvenir, l'une de AL-HAĠĠĀĠ IBN MAṬĀR (الحجاج بن مطر), mort en 830 et l'autre de ISHĀQ IBN ḤUNAYN (اسحاق بن حنين), mort en 910. Cette dernière sera revue par TĀBIT IBN QURRA (ثابت بن قزح), mort en 901. Les *Sphériques* de MENELAOS seront également traduites par ISHĀQ IBN ḤUNAYN sous le titre *al-aškāl al-kuriya* (الاتكال الكري), ce qui signifie littéralement *la forme des globes*.

¹³Cela correspond à l'année 773 de notre ère chrétienne.

¹⁴C'est le terme utilisé par les Arabes pour le mot indien *siddhānta*.

¹⁵Ce nom est peut-être une déformation arabe du patronyme du souverain indien *Vyagramuḥa*, sous le règne duquel *Brahmagupta* a composé son *siddhānta*.

¹⁶Il s'agit vraisemblablement de l'*arthaḡya* indien ou ligne des sinus.

¹⁷Ce calife est *al-Mansūr* (المسور), deuxième de la dynastie des abbassides.

¹⁸On dit aussi *Zīj al-Sind hind al-Kabīr* (زيجيه السندهند الكبير), littéralement *Zīj du Grand Sind hind*. La question de savoir lequel des *siddhānta* fut ainsi traduit est encore sans réponse.

Connu pour un célèbre « traité d'algèbre » (cf. chapitre 17, section 4), ABŪ 'ABD ALLĀH MUḤAMMAD IBN MŪSĀ AL-ḤWĀRIZMĪ (أبو عبد الله محمد بن موسى الخوارزمي), qui vivait au début du neuvième siècle, a établi des tables astronomiques et des tables trigonométriques. Elles ont été revues, durant la seconde moitié du dixième siècle, par MASLAMA AL-MAGRĪṬĪ (مسلم الجريطي) et traduites en latin, dès 1126 par ADELARD DE BATH. Elles figurent parmi les premières tables de l'empire musulman ; elles contiennent non seulement la fonction « sinus », mais aussi la fonction « tangente ». Cette notion de tangente, qui est en fait l'ombre d'un gnomon fixé horizontalement sur un mur vertical, semble avoir été introduite par ḤABAŠ AL-ḤĀSIB (حبش الحاسب), qui a fait des observations entre 825 et 835. AL-ḤWĀRIZMĪ a probablement participé aux travaux de mesure du méridien terrestre, ordonnés par le calife *al-Ma'mūn* (المأمون), et a amélioré la géographie de PTOLÉMÉE, tant en ce qui concerne le texte que les cartes.

AL-BATTĀNĪ (البتاني), né avant 858 et mort en 929, mérite également d'être cité. Son nom a été latinisé en ALBATE(G)NIUS. Son œuvre principale est un traité d'astronomie avec des tables, traduit en latin sous les titres *De scientia stellarum* et *De numeris stellarum et motibus*. Cet ouvrage a influencé notre astronomie jusqu'à la Renaissance. AL-BATTĀNĪ a déterminé, avec une grande précision, de nombreux coefficients astronomiques tels que la précession ou l'inclinaison de l'écliptique, ... Le troisième chapitre de son astronomie est consacré à la trigonométrie. Il utilise surtout les sinus qu'il préfère aux cordes grecques. Il travaille également avec les fonctions ombres, *umbra extensa* et *umbra versa*, ombre d'un gnomon vertical sur le sol et ombre d'un gnomon horizontal sur un mur vertical, ce qui correspond, on l'a déjà dit, à notre cotangente et à notre tangente. Il connaissait la relation entre les côtés et les angles d'un triangle sphérique, relation que nous exprimons de nos jours par la formule $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$.

Un autre grand nom parmi les savants du monde musulman est ABŪ-L-WAFĀ' (أبو الوفاء), l'un des derniers traducteurs arabes et commentateurs des œuvres grecques. Il est né en 940 et a travaillé à Bagdad, où il est mort vers 998. Outre ses apports en géométrie, en arithmétique, en astronomie, il développe très fort la trigonométrie. Il donne une nouvelle méthode pour construire des tables de sinus, détermine, par exemple, la valeur de $\sin 30'$ avec huit décimales correctes et calcule une table de tangentes. Il connaît des formules de trigonométrie équivalentes à celles que nous enseignons encore sur le sinus d'une somme ou d'une différence ou sur les sinus et cosinus des angles doubles...

D'origine égyptienne, IBN YŪNUS (بن يونس), qui est mort au Caire en 1009, a aussi apporté une contribution considérable à la trigonométrie. Il résout de nombreux problèmes d'astronomie sphérique au moyen de projections orthogonales et introduit certaines formules indispensables avant l'invention des logarithmes, telles que, par exemple, l'équivalent de $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Au XI^e siècle, un pas important est franchi avec l'obtention d'un théorème qui va permettre de se passer de celui de MENELAOS. Ce dernier est en effet d'un emploi très lourd lors des calculs, puisqu'il fait intervenir six quantités. Grâce au *théorème des sinus*, le nombre de quantités va se réduire à quatre. Dans le monde musulman, il porte le nom de *al-šakal al-muġnī* (الشكل المغني), littéralement, la *forme qui dispense* (de l'utilisation du théorème de MENELAOS). En trigonométrie plane, si A, B, C sont les trois angles d'un triangle dont les côtés

respectivement opposés sont désignés par a , b et c , on a¹⁹

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

La découverte de cette relation a provoqué une polémique à propos de la paternité du résultat. Ce fait nous est rapporté par AL-BĪRŪNĪ dans son ouvrage *al-kitāb maqālīd ‘ilm al-haiy’a* (الكتاب مقاليد علم الهيئة), qu’on peut traduire par *le livre des propos sur la science de l’astronomie*. Cet épisode nous permet de découvrir un réseau d’échanges scientifiques et une coopération à distance. Parmi les chercheurs qui ont permis d’arriver à ce résultat, on peut citer ABŪ-L-WAFĀ’ et IBN YŪNUS pour le centre de l’empire, AL-BĪRŪNĪ, pour l’Asie centrale et ĠĀBIR IBN AFLAH (جابر بن افله) pour l’Espagne.

Il est impossible de donner une liste exhaustive des hommes de science qui se sont occupés d’astronomie – et, par là-même, de trigonométrie – dans les pays du monde arabe, tant cette activité a connu de succès. Nous dirons encore que, dès le dixième siècle, de nombreuses relations étaient établies entre les six nombres trigonométriques classiques, qui tous étaient tabulés. Il faut se rendre compte que ces relations ne constituaient pas un jeu de l’esprit, mais étaient utilisées essentiellement pour simplifier les calculs.

5 La trigonométrie dans le monde occidental

Les résultats obtenus en astronomie et en trigonométrie vont pénétrer le monde occidental par le même biais que les autres sciences. C’est ce que nous avons appelé la troisième phase de transmission des savoirs à la fin du chapitre 16. Les savants européens vont poursuivre le travail déjà bien entamé par leurs collègues orientaux. Nous nous contenterons de citer quelques faits importants.

À la Renaissance, des mathématiciens allemands élaborent des tables trigonométriques d’une très grande précision, que l’on paie très cher, étant donné la masse de calculs à effectuer, sans instrument performant. CAJORI [33] n’hésite pas à affirmer, même si c’est un peu caricatural, que l’invention des logarithmes a doublé la vie des astronomes en diminuant leur labeur. Les logarithmes ont été inventés par l’écossais John NAPIER²⁰, Baron de Merchiston, qui a vécu de 1550 à 1617. L’anglais Henry BRIGGS (1556-1631), admirateur de NAPIER, suggère quelques améliorations qui sont approuvées par ce dernier, ce qui donnera lieu à l’appellation *logarithme de Briggs*. En 1624, BRIGGS publie son *Arithmetica logarithmica*, qui contient les logarithmes à 14 places décimales des nombres de 1 à 20 000 et de 90 000 à 100 000. Le trou est comblé par le Hollandais Adriaan VLACQ (1600?-1667), qui a passé dix ans à Londres comme libraire et éditeur.

La première publication des logarithmes de Briggs des fonctions trigonométriques est réalisée en 1620 par Edmund GUNTER (1581-1626), un collègue londonien de BRIGGS.

Il y aurait encore beaucoup de choses à dire sur l’histoire de la trigonométrie, mais nous pensons que ce qui précède brosse un tableau assez significatif de l’évolution de cette branche des mathématiques. Nous renvoyons donc le lecteur intéressé à la bibliographie.

¹⁹En trigonométrie sphérique, on a $\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}$, où les côtés a , b et c sont des arcs de grand cercle.

²⁰Ce surnom apparaît avec de nombreuses orthographes ; il est fort probable qu’à l’époque, il s’écrivait NEPER.