

PROPAGATION DE LA COVID, RO ET PIC ÉPIDÉMIQUE

Merci à l'auteure de cette activité, Nadine Meyer, pour le partage.

Prérequis : Suites définies par récurrence, variation des suites, proportionnalité.

Prévoir un tableur pour les parties 3 et 4.

Un des premiers modèles de propagation d'une épidémie est le modèle SIR, imaginé en 1927 par deux mathématiciens anglais, Kermack et Mc Kendrick, pour comprendre l'évolution de l'épidémie de peste.

Dans cet exercice, nous allons observer ce modèle simple appliqué à l'épidémie de Covid.

Dans ce modèle : on répartit la population dans trois groupes : les « sains » (qui n'ont pas attrapé le virus), les « infectés » (porteurs du virus et contagieux) et les « rétablis » (qui ne sont plus contagieux).



Puis, on travaille avec les hypothèses suivantes :

- On va considérer que la proportion d'infectés par jour augmente proportionnellement au produit $I_n \times S_n$ (produit qui représente les contacts potentiels entre sains et infectés). Le coefficient de proportionnalité sera noté β et sera appelé « taux de transmission ».
- Comme la durée moyenne d'infection est de 10 jours, on va considérer que chaque jour $1/10^{\text{ème}}$ des personnes infectées passe dans la catégorie rétablis.

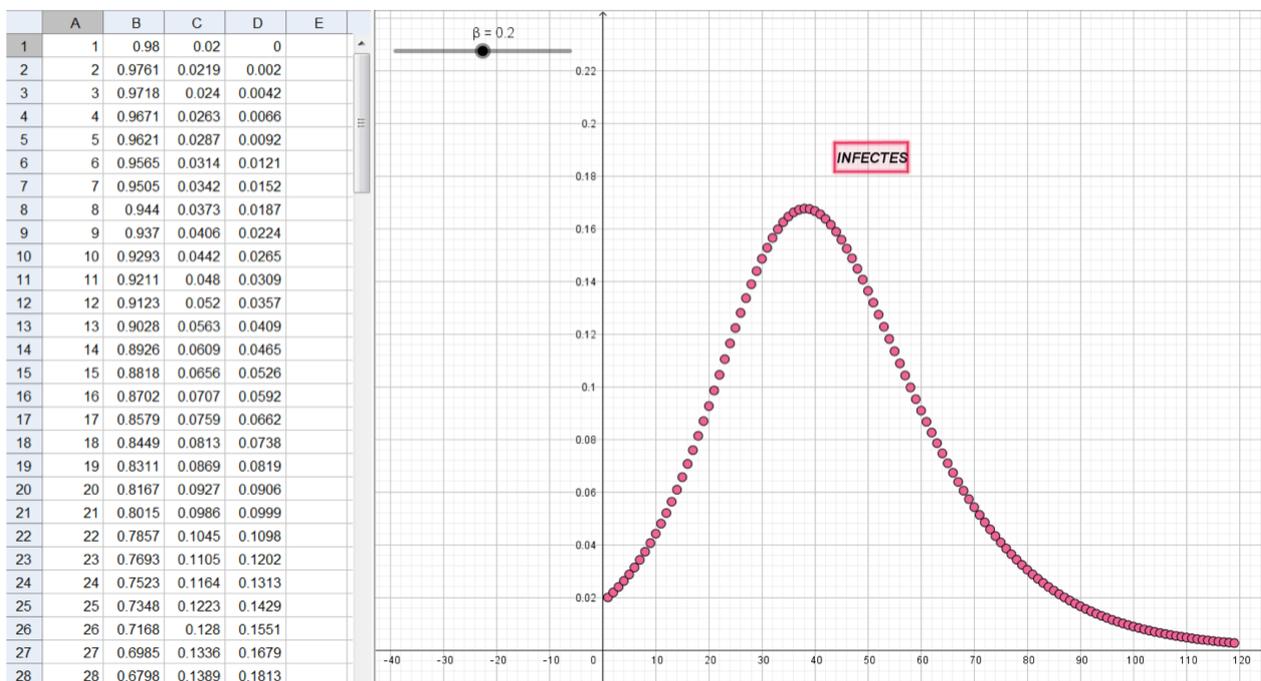
Considérons une population avec 98% de personnes saines et 2% de personnes infectées, et avec un taux de transmission $\beta = 0,2$. On a ainsi : $S_1 = 0,98$, $I_1 = 0,02$ et $R_1 = 0$.

1) Prouver qu'au jour 2, on a les proportions : $S_2 = 0,97608$, $I_2 = 0,02192$ et $R_2 = 0,002$.

2) Compléter les relations suivantes traduisant l'évolution des proportions dans chaque catégorie entre les jours n et $n + 1$:

$$\begin{aligned}
 S_{n+1} &= S_n - \dots \\
 I_{n+1} &= I_n + \dots - \dots \\
 R_{n+1} &= R_n + \dots
 \end{aligned}$$

3)



Compléter une feuille de calcul pour pouvoir y afficher le nuage de points du nombre d'infectés I_n par jour.

- 4) En utilisant la feuille de calcul précédente, décrire :
- Ce qui se produit lorsqu'on prend un taux de transmission β inférieur à 0,1.
 - Ce qui se produit lorsqu'on prend un taux de transmission β supérieur à 0,1.
 - La variation du nombre de jours avant le pic épidémique et du taux d'infectés au moment du pic en fonction de la valeur de β (lorsque β supérieur à 0,1).
- 5) a) D'après les hypothèses du modèle, pour un taux de transmission β quelconque, justifier que : $I_{n+1} - I_n = (\beta S_n - 0,1)I_n$.
- b) En déduire que si $\beta < 0,1$ le nombre I_n d'infectés sera décroissant.
- 6) On appelle taux de reproduction du virus, un jour donné, le nombre $r_0 = \beta \times S_n \times 10$. r_0 peut s'entendre comme une « estimation du nombre de gens qu'une personne atteinte de la maladie va à son tour contaminer sur la période d'infection de 10 jours ».
- Montrer qu'on peut aussi écrire : $I_{n+1} - I_n = 0,1(r_0 - 1)I_n$.
 - Que se passe-t-il si $r_0 > 1$?

Article du 10 mai 2020 issu de www.bfmtv.com :

L'Institut national de virologie Robert Koch, chargé de surveiller l'évolution de la pandémie, a fait état dimanche d'une hausse du taux d'infection, repassé autour de la zone considérée comme potentiellement dangereuse, de 1 à 1,1.

Des chiffres surveillés de très près

Ce taux dit de "reproduction" mesure la moyenne de gens qu'une personne atteinte de la maladie du Covid-19 va à son tour contaminer. Un chiffre inférieur à 1 suggère que le nombre d'infections dans le pays tend à la baisse, alors qu'un niveau supérieur suggère une tendance à la hausse. Ce chiffre est passé de 0,7 à plus de 1 en quelques jours seulement.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales