PROPAGATION DE LA COVID, R0 ET PIC ÉPIDÉMIQUE

*Merci à l’auteure de cette activité, Nadine Meyer, pour le partage.*

Prérequis : Suites définies par récurrence, variation des suites, proportionnalité.

Prévoir un tableur pour les parties 3 et 4.

*Un des premiers modèles de propagation d’une épidémie est le modèle SIR, imaginé en 1927 par deux mathématiciens anglais, Kermack et Mc Kendrick, pour comprendre l’évolution de l’épidémie de peste.*

*Dans cet exercice, nous allons observer ce modèle simple appliqué à l’épidémie de Covid.*

Dans ce modèle : on répartit la population dans trois groupes : les « sains » (qui n’ont pas attrapé le virus), les « infectés » (porteurs du virus et contagieux) et les « rétablis » (qui ne sont plus contagieux).

RETABLIS

Proportion *Rn* au jour *n*

INFECTES

Proportion *In* au jour *n*

SAINS

Proportion *Sn* au jour *n*

Puis, on travaille avec les hypothèses suivantes :

• On va considérer que la proportion d’infectés par jour augmente proportionnellement au produit $I\_{n}×S\_{n}$ (produit qui représente les contacts potentiels entre sains et infectés).

Le coefficient de proportionnalité sera noté $β$ et sera appelé « taux de transmission ».

• Comme la durée moyenne d’infection est de 10 jours, on va considérer que chaque jour 1/10ème des personnes infectées passe dans la catégorie rétablis.

Considérons une population avec 98% de personnes saines et 2% de personnes infectées, et avec un taux de transmission $β=0,2$. On a ainsi : $S\_{1}=0,98$, $I\_{1}=0,02$ et $R\_{1}=0$.

1) Prouver qu’au jour 2, on a les proportions : $S\_{2}=0,97608$, $I\_{2}=0,02192$ et $R\_{2}=0,002$.

2) Compléter les relations suivantes traduisant l’évolution des proportions dans chaque catégorie entre les jours $n$ et $n+1$ :

$$S\_{n+1}=S\_{n}- …$$

$I\_{n+1}=I\_{n}+ …- …$

$$R\_{n+1}=R\_{n}+ …$$



3)

Compléter une feuille de calcul pour pouvoir y afficher le nuage de points du nombre d’infectés $I\_{n}$ par jour.

4) En utilisant la feuille de calcul précédente, décrire :

a) Ce qui se produit lorsqu’on prend un taux de transmission $β$ inférieur à 0,1.

b) Ce qui se produit lorsqu’on prend un taux de transmission $β$ supérieur à 0,1.

c) La variation du nombre de jours avant le pic épidémique et du taux d’infectés au moment du pic en fonction de la valeur de $β$ (lorsque $β$ supérieur à 0,1).

5) a) D’après les hypothèses du modèle, pour un taux de transmission $β$ quelconque, justifier que : $I\_{n+1}-I\_{n}=\left(βS\_{n}-0,1\right)I\_{n}$.

 b) En déduire que si $β<0,1$ le nombre $I\_{n}$ d’infectés sera décroissant.

6) On appelle taux de reproduction du virus, un jour donné, le nombre $r\_{0}=β×S\_{n}×10.$

$r\_{0}$ peut s’entendre comme une « estimation du nombre de gens qu’une personne atteinte de la maladie va à son tour contaminer sur la période d’infection de 10 jours ».

 a) Montrer qu’on peut aussi écrire : $I\_{n+1}-I\_{n}=0,1\left(r\_{0}-1\right)I\_{n}$.

 b) Que se passe-t-il si $r\_{0}>1$ ?

Article du 10 mai 2020 issu de [www.bfmtv.com](https://www.bfmtv.com/international/coronavirus-inquietudes-dans-l-allemagne-deconfinee-ou-le-taux-d-infection-repart-a-la-hausse_AV-202005100110.html) :



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)