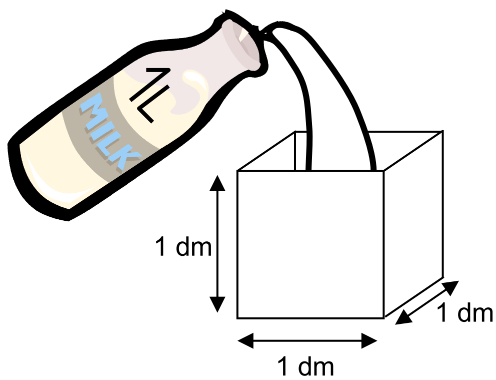
VOLUMES

I. Parallélépipède et cube

1) Contenance

a) Exemple



L'unité de contenance est le litre, notée L.
1 L est la contenance d'un cube de 1 dm d'arête.

b) Autres unités de contenance

Tableaux interactifs :
http://instrumenpoche.sesamath.net/IMG/tableaux.html

Hectolitre	Décalitre	Litre	Décilitre	Centilitre	Millilitre
hL	daL	L	dL	cL	mL
1 hL = 100 L	1 daL = 10 L	1 L	1 dL = 0,1 L	1 cL = 0,01 L	1 mL = 0,001 L

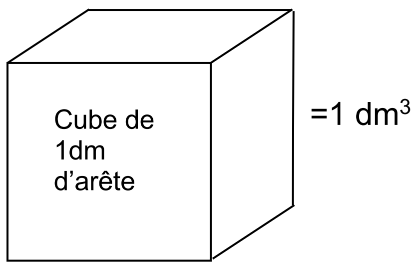
2) Unité de volume

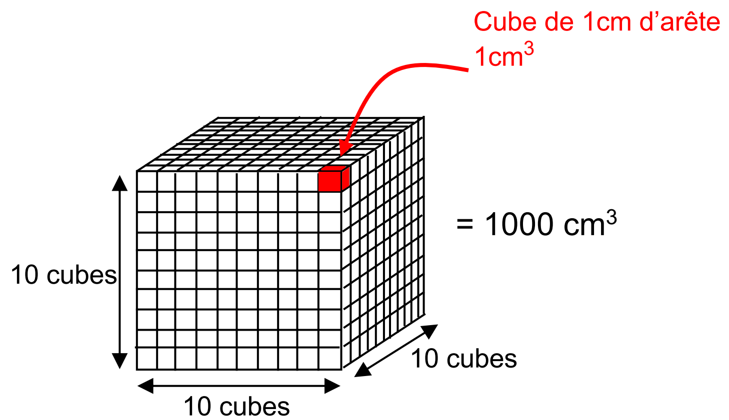
Le volume est la mesure de l'intérieur d'un solide. Il est directement lié à sa contenance.
1 L est la contenance d'un cube de 1 dm d'arête. Elle est associée à une unité de volume : le décimètre cube, noté dm^3.

$$\boxed{1\text{L} = 1\text{dm}^3}$$

De même, 1 m^3 est le volume d'un cube de 1 m d'arête.
1 cm^3 est le volume d'un cube de 1 cm d'arête.

3) Conversions





Dans un cube de 1dm d'arête, on peut ranger 10 x 10 x 10 = 1000 cubes de 1cm d'arête.
donc 1 dm^3 = 1000 cm^3

Entre deux unités de volume, il y a « trois rangs de décalage ».

km^3	hm^3	dam^3	m^3	dm^3 L	cm^3	mm^3
1 km^3 = 1000 hm^3	1 hm^3 = 1000 dam^3	1 dam^3 = 1000 m^3	1 m^3	1 dm^3 = 0,001 m^3	1 cm^3 = 0,001 dm^3	1 mm^3 = 0,001 cm^3

Méthode : Convertir les unités de volume

Vidéo https://youtu.be/nnXfRWe4WDE
Vidéo https://youtu.be/5SeX-WBitOU

1) Convertir 33 m^3 en dm^3.
2) Convertir 265,3 cm^3 en m^3.
3) Convertir 1 cm^3 en mm^3
3,3 dm^3 en mm^3
1,5 hm^3 en dam^3
2,1 L en m^3

1) 33 m^3 = 33000 dm^3 (le *m*^{3} est 1000 fois plus grand que le *dm*^{3})
Le nombre 33 « grandit » de 1x3 rangs.

2) 265,3 cm^3 = 0,0002653 m^3 (le *cm*^{3} est 1 000 000 fois plus petit que le *m*^{3})
Le nombre 265,3 « réduit » de 2x3 rangs.

3) 1 cm^3 = 1000 mm^3 3,3 dm^3 = 3 300 000 mm^3
1,5 hm^3 = 1 500 dam^3 2,1 L = 2,1 dm^3 = 0,0021 m^3

Avec un tableau :

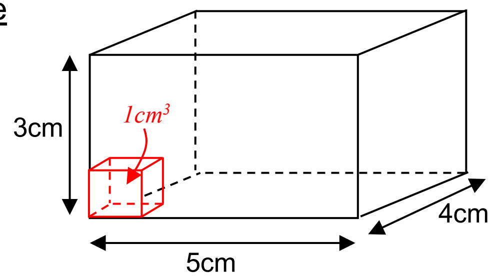
Vidéo https://youtu.be/nnXfRWe4WDE
Vidéo https://youtu.be/5SeX-WBitOU

Exemple :
Convertir 3,2 dm³ en cm³ et en cL.

km³	hm³	dam³	m³	dm³	cm³	mm³
				hl dal l	*dl cl m l*	
				3,	2 0 0,	

3,2 dm³ = 3200 cm³ 3,2 dm³ = 3,2 L = 320 cL (Rappel : 1 dm³ = 1 L)

4) Calculs de volume



L'unité est le petit cube rouge de 1cm d'arête, soit le cm³.
Déterminer le volume du parallélépipède en cm³ revient à calculer le nombre de petits cubes que peut contenir le parallélépipède.

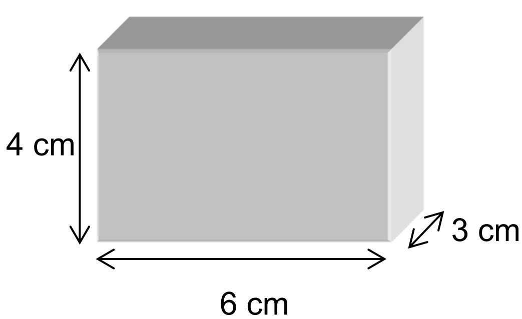
Sur une rangée, on place 5 petits cubes rouges.
Sur une couche, on place 4 rangées de 5 petits cubes, soit 4 x 5 = 20 petits cubes.
Ce parallélépipède peut contenir 3 couches de 20 petits cubes, soit 3 x 20 = 60 petits cubes.
Chaque petit cube a un volume de 1cm³, donc le parallélépipède a un volume de 60 cm³.

De manière générale, on a la formule :

Volume du parallélépipède = Longueur x largeur x Hauteur

Méthode : Calculer le volume d'un parallélépipède

Calculer le volume du parallélépipède ci-dessous :

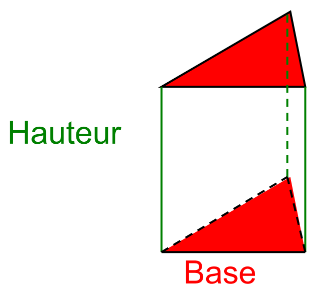


Volume du parallélépipède = $L \times l \times H$
$= 6 \times 3 \times 4$
$= 72\ cm^3$

II. Le prisme

Le mot vient du grec prisma = scier

Un prisme est un solide droit dont les bases sont des polygones superposables. Les arêtes latérales ont toutes la même longueur et sont parallèles. Elles mesurent la hauteur du prisme.
Les faces latérales sont des rectangles.
Les bases du prisme ci-contre sont des triangles.

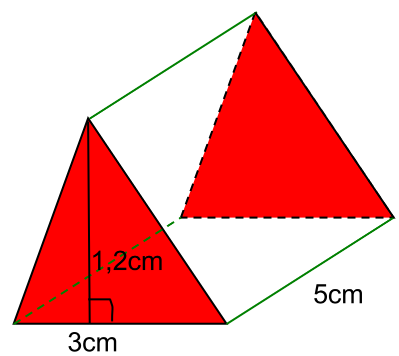


Volume du prisme =
Aire de la Base x Hauteur

Méthode : Calculer le volume d'un prisme

Vidéo https://youtu.be/IsAWODx566E

Calculer le volume du prisme ci-contre :

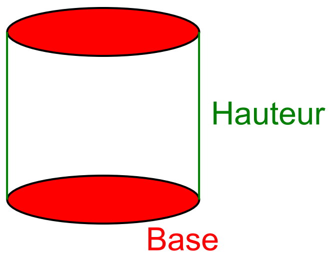


Aire de la base = b x h : 2 = 3 x 1,2 : 2 = 1,8 cm²
b et h sont la base et la hauteur du triangle de Base.
Hauteur du prisme = 5 cm
Volume = Aire de la base x H = 1,8 x 5 = 9 cm³

III. Le cylindre

Le mot « kylindros » désignait en grec un rouleau.
Le mot devient « cylindrus » en latin puis « chilindre » en ancien français.

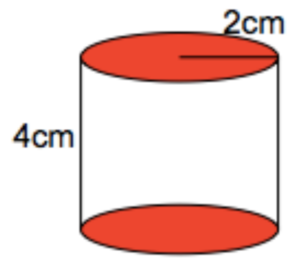
Un cylindre est solide droit dont les bases sont des disques de même rayon.
La hauteur d'un cylindre est la longueur joignant les centres des bases.



Volume du cylindre = Aire de la Base x Hauteur

Méthode : Calculer le volume d'un cylindre

Vidéo https://youtu.be/eJ8BSaTlpYU



Calculer le volume du cylindre ci-contre :

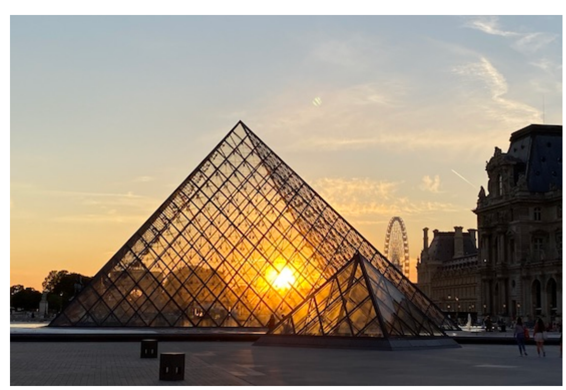
On commence par calculer l'aire de la base qui est un disque de rayon 2 cm :
$A = \pi \times r^2 = \pi \times 2^2 \approx 12{,}56 \text{ cm}^2$

Le cylindre a pour hauteur 4 cm, on en déduit sont volume :
$V = A \times H \approx 12{,}56 \times 4 \approx 50{,}24 \text{ cm}^3$

Pour se détendre :
Quel est le volume d'une pizza de rayon z et de hauteur a ?

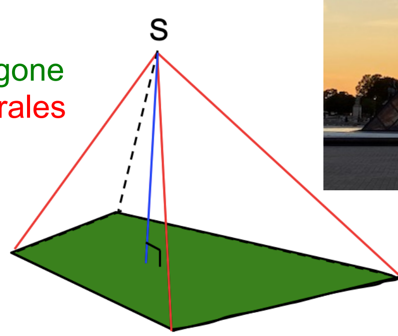
Réponse : Pi x z x z x a

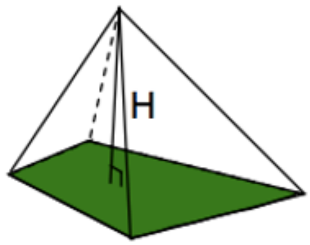
IV. La pyramide



Définition :
Une **pyramide** est un solide formé d'un polygone « surmonté » d'un sommet.

S : le sommet
En vert : la base, un polygone
En rouge : les arêtes latérales
En bleu : la hauteur

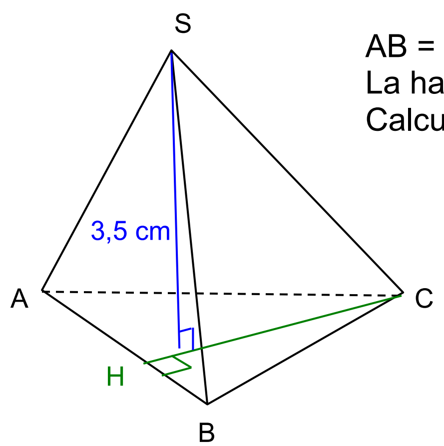




$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base x H}}{3}$$

Méthode : Calculer le volume d'une pyramide

Vidéo https://youtu.be/KKon_clVd9k



AB = 4 cm et CH = 5 cm.
La hauteur de la pyramide est de 3,5 cm
Calculer son volume arrondi au centième de cm^3.

Calcul de l'aire de la base :
La base est un triangle de hauteur CH = 5 cm.

$$\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2} = \frac{4 \times 5}{2} = 10\ cm^2$$

Calcul du volume de la pyramide :
La pyramide a pour hauteur H = 3,5 cm.

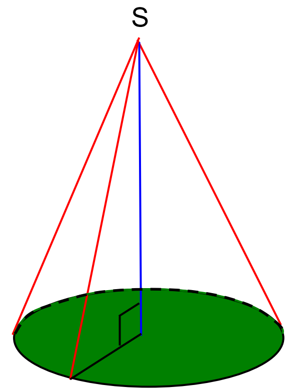
$$V = \frac{\mathcal{A} \times H}{3} = \frac{10 \times 3{,}5}{3} = \frac{35}{3}\ cm^3 \approx 11{,}67\ cm^3$$

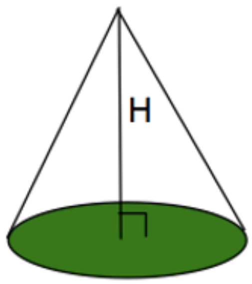
V. Le cône de révolution

Définition :
Un **cône** (ou cône de révolution) est un solide obtenu en faisant tourner un triangle rectangle autour d'un des côtés de l'angle droit.

En grec « kônos » signifiait une pomme de pin

S : le sommet
En vert : la base, un disque
En rouge : les génératrices
En bleu : la hauteur





$$\mathcal{V} = \frac{\text{Aire de la base} \times H}{3}$$

<u>Calcul du volume d'un cône :</u>

Vidéo https://youtu.be/kMssaNRPXz8

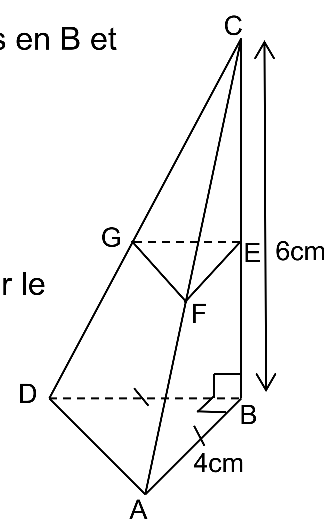
VI. <u>Agrandissement et réduction</u>

1) <u>Exemple d'introduction : Une pyramide réduite</u>

Les faces CBA et CBD de la pyramide sont des triangles rectangles en B et la base DBA est un triangle rectangle et isocèle en B.
CB = 6 cm et AB = 4 cm.

1) Calculer :
• L'aire du triangle DBA ;
• Le volume de la pyramide CDAB.

2) On coupe la pyramide par un plan parallèle à la base passant par le point E tel que CE = 3 cm.
La pyramide CGFE est <u>une réduction</u> de la pyramide CDAB.
Calculer :
• Le coefficient de réduction ;
• L'aire du triangle GEF ;
• Le volume de la pyramide CGFE.



1) • $\mathcal{A}_{\text{DBA}}$ = B x h : 2 = 4 x 4 : 2 = 8 cm^2
• $\mathcal{V}_{\text{CABD}}$ = $\mathcal{A}_{\text{DBA}}$ x H : 3 = 8 x 6 : 3 = 16 cm^3

2) • $\frac{CE}{CB} = \frac{3}{6}$ = 0,5

0,5 est le coefficient de réduction. → Les longueurs sont multipliées par 0,5.

• (EF = GE= 0,5 x 4 = 2 cm)

$\mathcal{A}_{GEF}$ = B x h : 2 = 2 x 2 : 2 = 2 cm^2

Compléter : $\mathcal{A}_{GEF}$ = ? x $\mathcal{A}_{DBA}$

2 = ? x 8

? = 2 : 8 = 0,25 (= $0,5^2$)

$\mathcal{A}_{GEF}$ = $0,5^2$ x $\mathcal{A}_{DBA}$ → Les aires sont multipliées par $0,5^2$.

• V_{CEFG} = $\mathcal{A}_{GEF}$ x H : 3 = 2 x 3 : 3 = 2 cm^3

Compléter : V_{CEFG} = ? x V_{CABD}

2 = ? x 16

? = 2 : 16 = 0,125 (= $0,5^3$)

V_{CEFG} = $0,5^3$ x V_{CABD} → Les volumes sont multipliés par $0,5^3$.

2) Propriétés

Propriétés :
Pour un agrandissement ou une réduction de rapport *k*,
-les longueurs sont multipliées par *k*,
-les aires sont multipliées par k^2,
-les volumes sont multipliés par k^3.

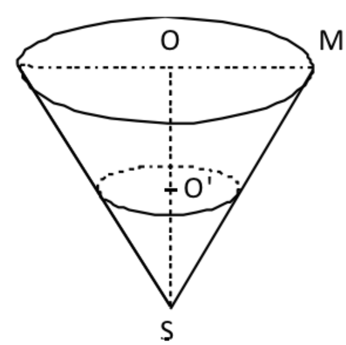
Remarque : Dans la pratique, on applique directement la propriété.

3) Application

Méthode : Appliquer un agrandissement ou une réduction

Vidéo https://youtu.be/YBwMKghrSOE

Le récipient représenté ci-contre a une forme conique et a pour dimensions : OM = 6 cm et SO = 12 cm.
1) Calculer, en cm^3, le volume de ce récipient.
Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au dixième de cm^3.
2) On remplit d'eau le récipient jusqu'au point O' tel que SO' = 4,5 cm.
Le cône formé par l'eau est une réduction du cône initial.
Calculer le coefficient de réduction.
3) Déduire une valeur approchée du volume d'eau.



1) Aire de la base du récipient :
Il s'agit d'un disque de rayon OM = 6 cm, donc : $\mathcal{A} = \pi R^2 = \pi \times 6^2 = 36\pi$

Volume du récipient :
Il s'agit d'un cône de hauteur SO = 12 cm, donc :
$$V = \frac{Aire\ base\ \times\ H}{3} = \frac{36\pi \times 12}{3} = 144\pi\ cm^3 =\ 452{,}4\ cm^3$$

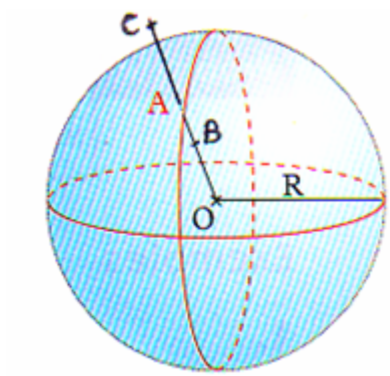
2) Coefficient de réduction :
Le coefficient de réduction est le rapport de deux longueurs qui se correspondent sur les deux solides. On prend ici les hauteurs SO et SO' des deux solides.
$k = \frac{SO'}{SO} = \frac{4{,}5}{12} = 0{,}375$

3) Pour une réduction de rapport k =0,375, les volumes sont multipliés par k^3 =$0{,}375^3$.
Ainsi, le volume du petit cône correspondant à l'eau dans le récipient est égal à :
$V' = 452{,}4 \times 0{,}375^3 = 23{,}9\ cm^3$.

VII. Sphères et boules

Vidéo https://youtu.be/YQF7CBY-uEk

1) Définitions



- *« Sphère »* du grec *« sphaira »* (balle à jouer)
La sphère $\mathcal{S}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM = R
Exemple : Une balle de ping-pong

- La boule $\mathcal{B}$ de centre O et de rayon R est l'ensemble des points M tels que OM$\leq$ R
Exemple : La Terre

B$\in\mathcal{B}$ B$\notin\mathcal{S}$ A$\in\mathcal{B}$ A$\in\mathcal{S}$ C$\notin\mathcal{B}$ C$\notin\mathcal{S}$

2) Aire de la sphère

$\boxed{Aire = 4\pi r^2}$

Exemple : Surface terrestre (rayon de la Terre $\approx$ 6370 km)

$\mathcal{A} = 4\pi\ r^2\ \approx 509\ 904\ 364\ km^2$.

3) Volume de la boule

$$\boxed{Volume = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

Exemple : Volume de la Terre

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \approx$ 1 082 696 932 000 km^3

Tableau récapitulatif :