SUITES ARITHMÉTIQUES ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 3$,
$u_1 = 8$,
$u_2 = 13$,
$u_3 = 18$.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.
La suite est donc définie par : $u_{n+1} = u_n + 5$ et $u_0 = 3$.

Définition : Une suite (u_n) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

Vidéo https://youtu.be/YCokWYcBBOk

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.
(u_n) est une suite arithmétique de raison –9.

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
…
$u_n = u_{n-1} + r$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + n \times r$
Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :
$u_n = u_0 + nr$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/iEuoMgBblz4

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$
Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et
$u_9 = u_0 + 9r = 19$.
En soustrayant membre à membre, on obtient : $u_0 + 5r - u_0 - 9r = 7 - 19$
Soit : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

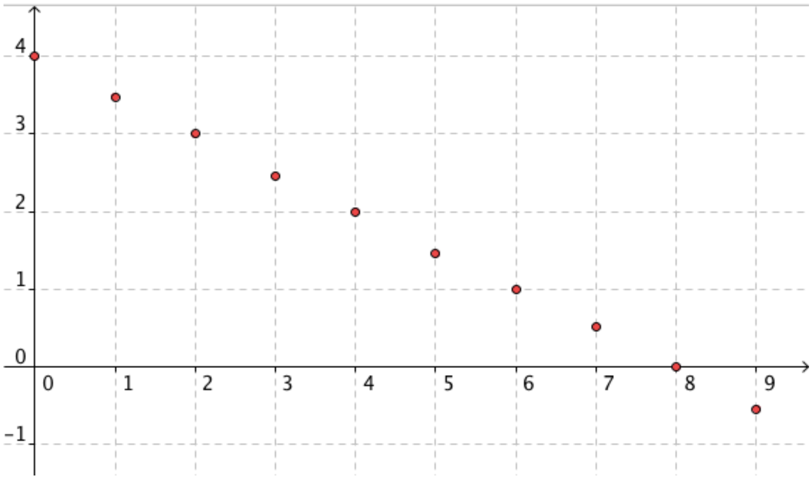
Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

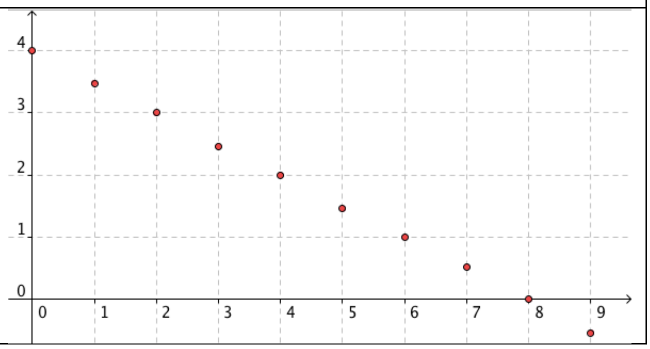
La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à –4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



RÉSUMÉ	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0.	**Exemple :** $r = -0,5$ et $u_0 = 4$
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = u_n - 0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5.
Propriété	$u_n = u_0 + nr$	$u_n = 4 - 0,5n$
Variations	Si $r > 0$: (u_n) est croissante. Si $r < 0$: (u_n) est décroissante.	$r = -0,5 < 0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.
La suite est donc définie par : $u_{n+1} = 2u_n$ et $u_0 = 5$.

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

Vidéo https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3 \times 5^{n+1}}{3 \times 5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$$
Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.
(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

Exemple concret :
On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $\qquad$ $u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500 \times 1{,}04^n$.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = q \times u_n$.
- Si q ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que q et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :
$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1$
$u_3 = q \times u_2$
…
$u_n = q \times u_{n-1}$

En multipliant membre à membre ces n égalités, on obtient :
$u_1 \times u_2 \times u_3 \times ... \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times ... \times u_{n-1} \times q^n$
Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $u_n = u_0 \times q^n$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/wUfleWpRr10

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.
Donc : $u_4 = u_0 \times q^4 = 8$ et
$u_7 = u_0 \times q^7 = 512$.
Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{u_0 \times q^7}{u_0 \times q^4} = q^3$ et $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$
Comme $u_0 \times q^4 = 8$, on a : $u_0 \times 4^4 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$.

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:
- Si $q > 1$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $0 < q < 1$ alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

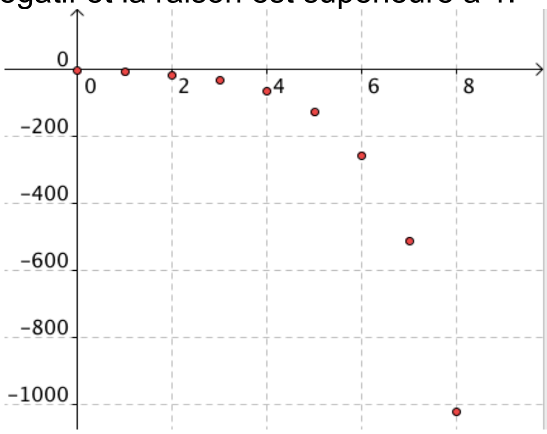
$u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q-1)$.

- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

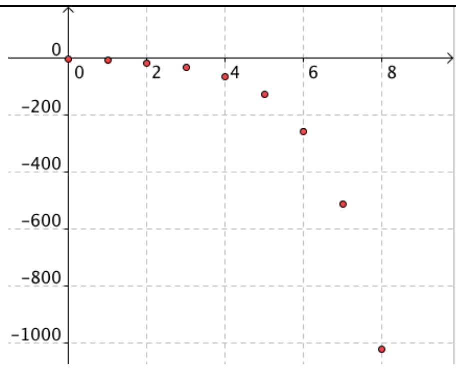
Vidéo https://youtu.be/vLshnJqW-64

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

RÉSUMÉ	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q = 2$ et $u_0 = -4$
Définition	$u_{n+1} = q \times u_n$	$u_{n+1} = 2u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n = u_0 \times q^n$	$u_n = -4 \times 2^n$
Variations	Pour $u_0 > 0$: Si $q > 1$: (u_n) est croissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0 < 0$: Si $q > 1$: (u_n) est décroissante. Si $0 < q < 1$: (u_n) est croissante.	$u_0 = -4 < 0$ $q = 2 > 1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q < 0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.	

3) Comportement à l'infini d'une suite géométrique

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n \to \infty} q^n$	*Pas de limite*	0	1	$+\infty$

Démonstration dans le cas $q > 1$:

Vidéo https://youtu.be/aSBGk_GEEew

Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$ (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$, d'après l'inégalité de Bernoulli.
Or $\lim\limits_{n \to \infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = +\infty$.

Exemple :
La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim\limits_{n \to \infty} 4^n = +\infty$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM
Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire u_n en fonction de n. Puis calculer u_{10}.
5) Étudier les variations de (u_n).

1) $u_1 = 1{,}03u_0 + 300 = 5450$
$u_2 = 1{,}03u_1 + 300 = 5913{,}5$

2) $v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$
$= 1{,}03u_n + 300 + 10000$
$= 1{,}03u_n + 10300$
$= 1{,}03(v_n - 10000) + 10300$, car $v_n = u_n + 10000$
$= 1{,}03v_n - 10300 + 10300$
$= 1{,}03v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme
$v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1{,}03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = v_n - 10000 = 15000 \times 1{,}03^n - 10000$
On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1{,}03^{10} - 10000 \approx 10158{,}75$

5) Pour tout n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1{,}03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1{,}03^n - 10000) \\ &= 15000 \times (1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n) \\ &= 15000 \times 1{,}03^n \times (1{,}03 - 1) \\ &= 450 \times 1{,}03^n > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : n est un entier naturel non nul alors on a : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk

	1	+	2	+	3	+ …	+	n–1	+	n
+	n	+	n–1	+	n–2	+ …	+	2	+	1
	(n+1)	+	(n+1)	+	(n+1)	+ …	+	(n+1)	+	(n+1)

= n x (n+1)

Donc : $2 \times (1 + 2 + 3 + \cdots + n) = n(n+1)$

Et donc : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs
Vidéo https://youtu.be/iSfevWwk8e4

Calculer les sommes S_1 et S_2 suivantes :
$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 348$ $\quad$ $S_2 = 33 + 36 + 39 + \cdots + 267$

$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + 348$
$= \dfrac{348 \times 349}{2} = 60726$

$S_2 = 33 + 36 + 39 + \cdots + 267$
$= 3 \times (11 + 12 + 13 + \cdots + 89)$
$= 3 \times \big((1 + 2 + 3 + \cdots + 89) - (1 + 2 + 3 + \cdots + 10)\big)$
$= 3 \times \left(\dfrac{89 \times 90}{2} - \dfrac{10 \times 11}{2}\right) = 11850$

Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d'un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d'effectuer des additions, plus exactement d'effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d'une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :
$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des n+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

Vidéo https://youtu.be/7msY7aEe084

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$

Ainsi :
$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1})$
$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$
$S \times (1 - q) = 1 - q^{n+1}$
$S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/eSDrE1phUXY

Calculer la somme S suivante :

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$
$= \frac{1-3^{14}}{1-q}$
$= 2\,391\,484$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XTftGHfnYMw

Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ $\qquad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination :

$2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right) = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec

$-1 < \frac{2}{3} < 1.$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1.$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

Donc par limite d'un produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$

Soit : $\lim_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1<\frac{1}{2}<1$.

Donc : $\lim_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$.

Et donc : $\lim_{n\to+\infty} 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

Soit : $\lim_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2$.