SUITES ARITHMÉTIQUES

ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.

Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 3,

*u1* = 8,

*u2* = 13,

*u3* = 18.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : et .

Définition : Une suite (*un*) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre *r* tel que pour tout entier *n*, on a : .

Le nombre *r* est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YCokWYcBBOk**](https://youtu.be/YCokWYcBBOk)

1) La suite (*un*) définie par : est-elle arithmétique ?

2) La suite (*vn*) définie par : est-elle arithmétique ?

1) .

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.

(*un*) est une suite arithmétique de raison –9.

2) .

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(*vn*) n'est pas une suite arithmétique.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6O0KhPMHvBA**](https://youtu.be/6O0KhPMHvBA)

Propriété : (*un*) est une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a :

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Jn4\_xM\_ZJD0**](https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0)

La suite arithmétique (*un*) de raison *r* et de premier terme *u0* vérifie la relation

.

En calculant les premiers termes :

…

En additionnant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iEuoMgBblz4**](https://youtu.be/iEuoMgBblz4)

Considérons la suite arithmétique (*un*) tel que et .

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

2) Exprimer *un* en fonction de *n*.

1) Les termes de la suite sont de la forme

Ainsi et

.

En soustrayant membre à membre, on obtient :

Soit : donc .

Comme , on a : et donc : .

2) soit ou encore

2) Variations

Propriété : (*un*) est une suite arithmétique de raison *r.*

- Si *r* > 0 alors la suite (*un*) est croissante.

- Si *r* < 0 alors la suite (*un*) est décroissante.

Démonstration : .

- Si *r* > 0 alors et la suite (*un*) est croissante.

- Si *r* < 0 alors et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/R3sHNwOb02M**](https://youtu.be/R3sHNwOb02M)

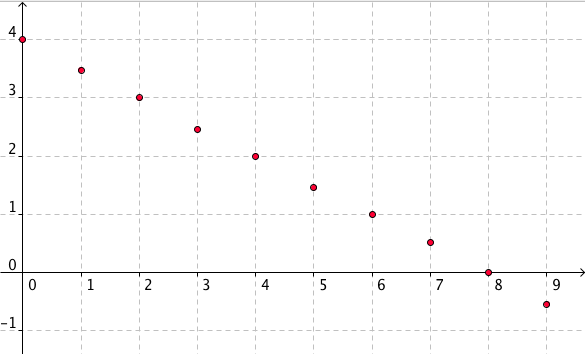
La suite arithmétique (*un*) définie par est décroissante car de raison négative et égale à –4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | (*un*) une **suite arithmétique**   * de **raison** *r* * de premier terme *u0*. | **Exemple :**  et |
| Définition |  | La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5. |
| Propriété |  |  |
| Variations | Si *r* > 0 : (*un*) est croissante.  Si *r* < 0 : (*un*) est décroissante. | La suite (*un*) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :  Les points de la représentation graphique sont alignés. |  |

II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 5,

*u1* = 10,

*u2* = 20,

*u3* = 40.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : et .

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTmdtbQpa0c**](https://youtu.be/WTmdtbQpa0c)

Définition : Une suite (*un*) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre *q* tel que pour tout entier *n*, on a : .

Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ**](https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ)

La suite (*un*) définie par : est-elle géométrique ?

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(*un*) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme .

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

De manière générale : avec

On peut également exprimer *un* en fonction de *n* : .

Propriété : (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a : .

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE**](https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE)

La suite géométrique (*un*) de raison *q* et de premier terme *u0* vérifie la relation

.

- Si *q* ou *u0* est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.

- Dans la suite, on suppose donc que *q* et *u0* sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

…

En multipliant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques :

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wUfleWpRr10**](https://youtu.be/wUfleWpRr10)

Considérons la suite géométrique (*un*) tel que et .

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

Les termes de la suite sont de la forme .

Donc : et

.

Ainsi : = et = donc .

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi

Comme , on a : et donc : .

2) Variations

Propriété : (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme non nul *u0.*

Pour :

- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est croissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est décroissante.

Pour :

- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est décroissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est croissante.

Démonstration dans le cas où *u0* > 0 :

.

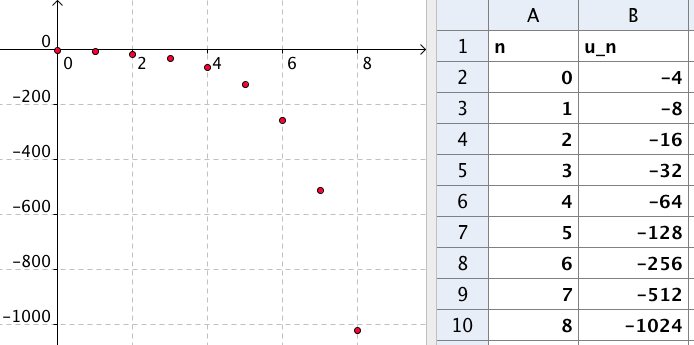
- Si *q* > 1 alors et la suite (*un*) est croissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vLshnJqW-64**](https://youtu.be/vLshnJqW-64)

La suite géométrique (*un*) définie par est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison *q* est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | (*un*) une **suite géométrique**   * de **raison** *q* * de premier terme *u0*. | **Exemple :**  et |
| Définition |  | Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété |  |  |
| Variations | Pour :  Si *q* > 1 : (*un*) est croissante.  Si 0 < *q* < 1 : (*un*) est décroissante.  Pour :  Si *q* > 1 : (*un*) est décroissante.  Si 0 < *q* < 1 : (*un*) est croissante. | La suite (*un*) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :  Si *q* < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. |  |

3) Comportement à l'infini d'une suite géométrique

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *q* |  |  |  |  |
|  | *Pas de limite* | 0 | 1 |  |

Démonstration dans le cas *q* > 1 :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aSBGk\_GEEew**](https://youtu.be/aSBGk_GEEew)

Prérequis : Pour tout entier naturel *n*, on a : (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que , alors on peut poser avec .

, d’après l’inégalité de Bernoulli.

Or car .

Donc d’après le théorème de comparaison : .

Exemple :

La suite de terme général a pour limite car .

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6-vFnQ6TghM**](https://youtu.be/6-vFnQ6TghM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0CNt\_fUuwEY**](https://youtu.be/0CNt_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note (*un*) la somme épargnée à l'année *n*.

On a alors : et .

1) Calculer et .

2) Prouver que la suite (*vn*) définie pour tout entier *n* par est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer *vn* en fonction de *n*.

4) En déduire *un* en fonction de *n*. Puis calculer .

5) Étudier les variations de (*un*).

1)

2)

, car

Donc (*vn*) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

.

3) Pour tout *n*, .

4) Pour tout *n*,

On a alors :

5) Pour tout *n*,

Donc la suite (*un*) est strictement croissante.

III. Sommes de termes consécutifs

1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : *n* est un entier naturel non nul alors on a :

Remarque : Il s'agit de la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk**](https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk)

1 + 2 + 3 + … + *n*–1 + *n*

+ *n* + *n*–1 + *n*–2 + … + 2 + 1

(*n*+1) + (*n*+1) + (*n*+1) + … + (*n*+1) + (*n*+1)

= *n* x (*n*+1)

Donc :

Et donc : .

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs**](https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iSfevWwk8e4**](https://youtu.be/iSfevWwk8e4)

Calculer les sommes *S1* et *S2* suivantes :



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d’un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d’effectuer des additions, plus exactement d’effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d’une série arithmétique.

2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : *n* est un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1 alors on a :

Remarque : Il s'agit de la somme des *n*+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7msY7aEe084**](https://youtu.be/7msY7aEe084)

Ainsi :

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eSDrE1phUXY**](https://youtu.be/eSDrE1phUXY)

Calculer la somme *S* suivante :

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTftGHfnYMw**](https://youtu.be/XTftGHfnYMw)

Déterminer les limites suivantes :

a) est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc ne possède pas de limite.

Et donc n'existe pas.

b) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination :

• Or , car est une suite géométrique de raison avec

.

Donc : .

Or car est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

Donc par limite d'un produit :

Soit : .

c) On reconnaît les *n* premiers termes d'une suite géométrique de raison et de premier terme 1. Donc :

Or , comme limite d’une suite géométrique de raison avec

.

Donc : .

Et donc : .

Soit : .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)