SUITES ARITHMÉTIQUES

ET SUITES GÉOMÉTRIQUES

I. Suites arithmétiques

 1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.

Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 3,

*u1* = 8,

*u2* = 13,

*u3* = 18.

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $u\_{n+1}=u\_{n}+5$ et $u\_{0}=3$.

Définition : Une suite (*un*) est une **suite arithmétique** s'il existe un nombre *r* tel que pour tout entier *n*, on a : $u\_{n+1}=u\_{n}+r$.

Le nombre *r* est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YCokWYcBBOk**](https://youtu.be/YCokWYcBBOk)

1) La suite (*un*) définie par : $u\_{n}=7-9n$ est-elle arithmétique ?

2) La suite (*vn*) définie par : $v\_{n}=n^{2}+3$ est-elle arithmétique ?

1) $u\_{n+1}-u\_{n}=7-9\left(n+1\right)-7+9n=7-9n-9-7+9n=-9$.

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.

(*un*) est une suite arithmétique de raison –9.

2) $v\_{n+1}-v\_{n}=\left(n+1\right)^{2}+3-n^{2}-3=n^{2}+2n+1+3-n^{2}-3=2n+1$.

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.

(*vn*) n'est pas une suite arithmétique.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6O0KhPMHvBA**](https://youtu.be/6O0KhPMHvBA)

Propriété : (*un*) est une suite arithmétique de raison *r* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $u\_{n}=u\_{0}+nr$

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Jn4\_xM\_ZJD0**](https://youtu.be/Jn4_xM_ZJD0)

La suite arithmétique (*un*) de raison *r* et de premier terme *u0* vérifie la relation

$u\_{n+1}=u\_{n}+r$.

En calculant les premiers termes :

$u\_{1}=u\_{0}+r$

$$u\_{2}=u\_{1}+r$$

$$u\_{3}=u\_{2}+r$$

…

$$u\_{n}=u\_{n-1}+r$$

En additionnant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

$$u\_{1}+u\_{2}+u\_{3}+…+u\_{n}=u\_{0}+u\_{1}+u\_{2}+…+u\_{n-1}+n×r$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

$$u\_{n}=u\_{0}+nr$$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iEuoMgBblz4**](https://youtu.be/iEuoMgBblz4)

Considérons la suite arithmétique (*un*) tel que $u\_{5}=7$ et $u\_{9}=19$.

1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

2) Exprimer *un* en fonction de *n*.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u\_{n}=u\_{0}+nr$

Ainsi $u\_{5}=u\_{0}+5r=7$ et

 $u\_{9}=u\_{0}+9r=19$.

En soustrayant membre à membre, on obtient : $u\_{0}+5r- u\_{0}-9r=7-19$

Soit : $5r-9r=7-19$ donc $r=3$.

Comme $u\_{0}+5r=7$, on a : $u\_{0}+5×3=7$ et donc : $u\_{0}=-8$.

2) $u\_{n}=u\_{0}+nr$ soit $u\_{n}=-8+n×3$ ou encore $u\_{n}=3n-8$

 2) Variations

Propriété : (*un*) est une suite arithmétique de raison *r.*

- Si *r* > 0 alors la suite (*un*) est croissante.

- Si *r* < 0 alors la suite (*un*) est décroissante.

Démonstration : $u\_{n+1}-u\_{n}=u\_{n}+r-u\_{n}=r$.

- Si *r* > 0 alors $u\_{n+1}-u\_{n}>0$ et la suite (*un*) est croissante.

- Si *r* < 0 alors $u\_{n+1}-u\_{n}<0$ et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/R3sHNwOb02M**](https://youtu.be/R3sHNwOb02M)

La suite arithmétique (*un*) définie par $u\_{n}=5-4n$ est décroissante car de raison négative et égale à –4.

 3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :

On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.



|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **RÉSUMÉ** | (*un*) une **suite arithmétique** * de **raison** *r*
* de premier terme *u0*.
 | **Exemple :**$r=-0,5$ et $u\_{0}=4$ |
| Définition | $$u\_{n+1}=u\_{n}+r$$ | $$u\_{n+1}=u\_{n}-0,5$$La différence entre un terme et son précédent est égale à –0,5. |
| Propriété | $$u\_{n}=u\_{0}+nr$$ | $$u\_{n}=4-0,5n$$ |
| Variations | Si *r* > 0 : (*un*) est croissante.Si *r* < 0 : (*un*) est décroissante. | $$r=-0,5<0$$La suite (*un*) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :Les points de la représentation graphique sont alignés. |  |

II. Suites géométriques

 1) Définition

Exemple :

Considérons une suite numérique (*un*) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.

Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :

*u0* = 5,

*u1* = 10,

*u2* = 20,

*u3* = 40.

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $u\_{n+1}=2u\_{n}$ et $u\_{0}=5$.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WTmdtbQpa0c**](https://youtu.be/WTmdtbQpa0c)

Définition : Une suite (*un*) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre *q* tel que pour tout entier *n*, on a : $u\_{n+1}=q×u\_{n}$.

Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ**](https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ)

La suite (*un*) définie par : $u\_{n}=3×5^{n}$ est-elle géométrique ?

$$\frac{u\_{n+1}}{u\_{n}}=\frac{3×5^{n+1}}{3×5^{n}}=\frac{5^{n+1}}{5^{n}}=5^{n+1-n}=5$$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(*un*) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u\_{0}=3×5^{0}=3$.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.

Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.

Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$u\_{1}=1,04×500=520$ $u\_{2}=1,04×520=540,80$

$u\_{3}=1,04×540,80=562,432$

De manière générale : $u\_{n+1}=1,04×u\_{n}$ avec $u\_{0}=500$

On peut également exprimer *un* en fonction de *n* : $u\_{n}=500×1,04^{n}$.

Propriété : (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE**](https://youtu.be/OpLU8Ci1GnE)

La suite géométrique (*un*) de raison *q* et de premier terme *u0* vérifie la relation

$u\_{n+1}=q×u\_{n}$.

- Si *q* ou *u0* est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.

- Dans la suite, on suppose donc que *q* et *u0* sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.

En calculant les premiers termes :

$$u\_{1}=q×u\_{0}$$

$$u\_{2}=q×u\_{1}$$

$$u\_{3}=q×u\_{2}$$

…

$$u\_{n}=q×u\_{n-1}$$

En multipliant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

$$u\_{1}×u\_{2}×u\_{3}×…×u\_{n}=u\_{0}×u\_{1}×u\_{2}×…×u\_{n-1}×q^{n}$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques : $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wUfleWpRr10**](https://youtu.be/wUfleWpRr10)

Considérons la suite géométrique (*un*) tel que $u\_{4}=8$ et $u\_{7}=512$.

Déterminer la raison et le premier terme de la suite (*un*).

Les termes de la suite sont de la forme $u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$.

Donc : $u\_{4}=u\_{0}×q^{4}=8$ et

 $u\_{7}=u\_{0}×q^{7}=512$.

Ainsi : $\frac{u\_{7}}{u\_{4}}$ = $\frac{u\_{0}×q^{7}}{u\_{0}×q^{4}}$ $=q^{3}$ et $\frac{u\_{7}}{u\_{4}}$ = $\frac{512}{8}$ $=64$ donc $q^{3}=64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi $q=\sqrt[3]{64}=4$

Comme $u\_{0}×q^{4}=8$, on a : $u\_{0}×4^{4}=8$ et donc : $u\_{0}=$ $\frac{1}{32}$.

 2) Variations

Propriété : (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme non nul *u0.*

Pour $u\_{0}>0$ :

- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est croissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est décroissante.

Pour $u\_{0}<0$ :

- Si *q* > 1 alors la suite (*un*) est décroissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors la suite (*un*) est croissante.

Démonstration dans le cas où *u0* > 0 :

$u\_{n+1}-u\_{n}=u\_{0}q^{n+1}-u\_{0}q^{n}=u\_{0}q^{n}\left(q-1\right)$.

- Si *q* > 1 alors $u\_{n+1}-u\_{n}>0$ et la suite (*un*) est croissante.

- Si 0 < *q* < 1 alors $u\_{n+1}-u\_{n}<0$ et la suite (*un*) est décroissante.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vLshnJqW-64**](https://youtu.be/vLshnJqW-64)

La suite géométrique (*un*) définie par $u\_{n}=-4×2^{n}$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



Remarque : Si la raison *q* est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  **RÉSUMÉ** | (*un*) une **suite géométrique** * de **raison** *q*
* de premier terme *u0*.
 |  **Exemple :**$q=2$ et $u\_{0}=-4$ |
| Définition | $$u\_{n+1}=q×u\_{n}$$ | $$u\_{n+1}=2u\_{n}$$Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2. |
| Propriété | $$u\_{n}=u\_{0}×q^{n}$$ | $$u\_{n}=-4×2^{n}$$ |
| Variations | Pour $u\_{0}>0$ :Si *q* > 1 : (*un*) est croissante.Si 0 < *q* < 1 : (*un*) est décroissante.Pour $u\_{0}<0$ :Si *q* > 1 : (*un*) est décroissante.Si 0 < *q* < 1 : (*un*) est croissante. | $$u\_{0}=-4<0$$$$q=2>1$$La suite (*un*) est décroissante. |
| Représentation graphique | Remarque :Si *q* < 0 : la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante. |  |

3) Comportement à l'infini d'une suite géométrique

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *q* | $$q\leq -1$$ | $$-1<q<1$$ | $$q=1$$ | $$q>1$$ |
| $$\lim\_{n\to \infty }q^{n}$$ | *Pas de limite* | 0 | 1 | $$+\infty $$ |

Démonstration dans le cas *q* > 1 :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aSBGk\_GEEew**](https://youtu.be/aSBGk_GEEew)

Prérequis : Pour tout entier naturel *n*, on a : $\left(1+a\right)^{n}\geq 1+na$ (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q>1$, alors on peut poser $q=a+1$ avec $a>0$.

$q^{n}=\left(1+a\right)^{n}\geq 1+na$, d’après l’inégalité de Bernoulli.

Or $\lim\_{n\to \infty }1+na=+\infty $ car $a>0$.

Donc d’après le théorème de comparaison : $\lim\_{n\to \infty }q^{n}=+\infty $.

Exemple :

La suite de terme général $-5×4^{n}$ a pour limite $-\infty $ car $\lim\_{n\to \infty }4^{n}=+\infty $.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6-vFnQ6TghM**](https://youtu.be/6-vFnQ6TghM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0CNt\_fUuwEY**](https://youtu.be/0CNt_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus sur ce compte.

On note (*un*) la somme épargnée à l'année *n*.

On a alors : $u\_{n+1}=1,03u\_{n}+300$ et $u\_{0}=5000$.

1) Calculer $u\_{1}$ et $u\_{2}$.

2) Prouver que la suite (*vn*) définie pour tout entier *n* par $v\_{n}=u\_{n}+10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer *vn* en fonction de *n*.

4) En déduire *un* en fonction de *n*. Puis calculer $u\_{10}$.

5) Étudier les variations de (*un*).

1) $u\_{1}=1,03u\_{0}+300=5450$

 $u\_{2}=1,03u\_{1}+300=5913,5$

2) $v\_{n+1}=u\_{n+1}+10000$

$$ =1,03u\_{n}+300+10000$$

$$ =1,03u\_{n}+10300$$

$ =1,03\left(v\_{n}-10000\right)+10300$, car $v\_{n}=u\_{n}+10000$

$$ =1,03v\_{n}-10300+10300$$

$$ =1,03v\_{n}$$

Donc (*vn*) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$v\_{0}=u\_{0}+10000=5000+10000=15000$.

3) Pour tout *n*, $v\_{n}=15000×1,03^{n}$.

4) Pour tout *n*, $u\_{n}=v\_{n}-10000=15000×1,03^{n}-10000$

On a alors : $u\_{10}=15000×1,03^{10}-10000≈10158,75$

5) Pour tout *n*,

$$u\_{n+1}-u\_{n}=15000×1,03^{n+1}-10000-\left(15000×1,03^{n}-10000\right)$$

$$ =15000×\left(1,03^{n+1}-1,03^{n}\right)$$

$$ =15000×1,03^{n}×\left(1,03-1\right)$$

$$ =450×1,03^{n}>0$$

Donc la suite (*un*) est strictement croissante.

III. Sommes de termes consécutifs

 1) Cas d'une suite arithmétique

Propriété : *n* est un entier naturel non nul alors on a : $1+2+3+…+n=$ $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$

Remarque : Il s'agit de la somme des *n* premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk**](https://youtu.be/-G3FWv5Bkzk)

 1 + 2 + 3 + … + *n*–1 + *n*

+ *n* + *n*–1 + *n*–2 + … + 2 + 1

 (*n*+1) + (*n*+1) + (*n*+1) + … + (*n*+1) + (*n*+1)

 = *n* x (*n*+1)

Donc : $2×\left(1+2+3+…+n\right)=n\left(n+1\right)$

Et donc : $1+2+3+…+n=$ $\frac{n\left(n+1\right)}{2}$.

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite arithmétique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs**](https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iSfevWwk8e4**](https://youtu.be/iSfevWwk8e4)

Calculer les sommes *S1* et *S2* suivantes :

$S\_{1}=1+2+3+…+348$ $S\_{2}=33+36+39+…+267$

$$S\_{1}=1+2+3+…+348$$

$$=\frac{348×349}{2}=60726$$

$$S\_{2}=33+36+39+…+267$$

$$=3×\left(11+12+13+…+89\right)$$

$$=3×\left(\left(1+2+3+…+89\right)-\left(1+2+3+…+10\right)\right)$$

$$=3×\left(\frac{89×90}{2}-\frac{10×11}{2}\right)=11850$$



Une anecdote relate comment le mathématicien allemand *Carl Friedrich Gauss* (1777 ; 1855), alors âgé de 10 ans a fait preuve d’un talent remarquable pour le calcul mental. Voulant occuper ses élèves, le professeur demande d’effectuer des additions, plus exactement d’effectuer la somme des nombres de 1 à 100. Après très peu de temps, le jeune *Gauss* impressionne son professeur en donnant la réponse correcte. Sa technique consiste à regrouper astucieusement les termes extrêmes par deux. Sans le savoir encore, *Gauss* a découvert la formule permettant de calculer la somme des termes d’une série arithmétique.

 2) Cas d'une suite géométrique

Propriété : *n* est un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1 alors on a :

$1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}=$ $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Remarque : Il s'agit de la somme des *n*+1 premiers termes d'une suite géométrique de raison *q* et de premier terme 1.

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7msY7aEe084**](https://youtu.be/7msY7aEe084)

$$S=1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}$$

$$q×S=q+q^{2}+q^{3}+q^{4}+…+q^{n+1}$$

Ainsi :

$$S-q×S=\left(1+q+q^{2}+q^{3}+…+q^{n}\right)-\left(q+q^{2}+q^{3}+q^{4}+…+q^{n+1}\right)$$

$$S-q×S=1-q^{n+1}$$

$$S×\left(1-q\right)=1-q^{n+1}$$

$S=$ $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Méthode : Calculer la somme des termes d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eSDrE1phUXY**](https://youtu.be/eSDrE1phUXY)

Calculer la somme *S* suivante :

$$S=1+3+3^{2}+3^{3}+…+3^{13}$$

$$S=1+3+3^{2}+3^{3}+…+3^{13}$$

$=$ $\frac{1-3^{14}}{1-q}$

$$=2 391 484$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTftGHfnYMw**](https://youtu.be/XTftGHfnYMw)

Déterminer les limites suivantes :

$$ a) \lim\_{n\to +\infty }\frac{\left(-2\right)^{n}}{3} b) \lim\_{n\to +\infty }2^{n}-3^{n} c) \lim\_{n\to +\infty }1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+…+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

a) $\left(-2\right)^{n}$ est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc $\left(-2\right)^{n}$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim\_{n\to +\infty } \frac{\left(-2\right)^{n}}{3}$ n'existe pas.

b) • $\lim\_{n\to +\infty }2^{n}=+\infty $ et $\lim\_{n\to +\infty }3^{n}=+\infty $

Il s'agit d'une forme indéterminée du type $"\infty -\infty "$.

• Levons l’indétermination :

$$2^{n}-3^{n}=3^{n}\left(\frac{2^{n}}{3^{n}}-1\right)=3^{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-1\right)$$

• Or $\lim\_{n\to +\infty }\left(\frac{2}{3}\right)^{n} =0$, car $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec

 $-1<$ $\frac{2}{3}$ $<1$.

Donc : $\lim\_{n\to +\infty }$ $\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-1=-1$.

Or $\lim\_{n\to +\infty }3^{n}=+\infty $ car $3^{n}$ est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

Donc par limite d'un produit : $\lim\_{n\to +\infty }3^{n}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}-1\right)=-\infty $

Soit : $\lim\_{n\to +\infty }2^{n}-3^{n}=-\infty $.

c) On reconnaît les *n* premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+…+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2×\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\_{n\to +\infty }\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} =0$, comme limite d’une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec

 $-1<$ $\frac{1}{2}$ $<1$.

Donc : $\lim\_{n\to +\infty }1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=1$.

Et donc : $\lim\_{n\to +\infty }2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2$.

Soit : $\lim\_{n\to +\infty }1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{3}+…+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=2$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)