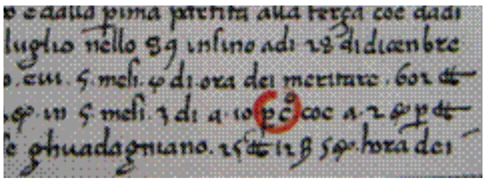
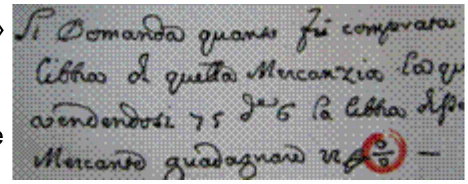
POURCENTAGES



Manuscrit italien de 1490 : « pc° » signifiait « per cento ».

Manuscrit italien de 1684 : On trouve le symbole $\frac{o}{o}$ proche de la notation actuelle



I. Appliquer un pourcentage

70 % des enfants aiment les mathématiques cela veut dire que :
sur 100 enfants, il y en a 70 qui aiment les mathématiques.

70 %
70 pour 100
70 sur 100
$\frac{70}{100}$

Toutes les écritures ci-dessus sont égales.

Méthode : Appliquer un pourcentage (1)

Vidéo https://youtu.be/Ce6E56gsbY0

Si 70 % des enfants aiment les mathématiques : sur un groupe de 30 enfants, combien d'entre eux devraient aimer les maths ?

On cherche les 70 % de 30 élèves.

70 % de 30 = $\frac{70}{100}$ x 30
= 70 : 100 x 30
= 21

Dans ce contexte, 21 enfants sur 30 devraient aimer les maths.

Quelques pourcentages à connaître :

Vidéo https://youtu.be/ixjag8jXLXk

Pourcentage	10 %	25 %	50 %	75 %	100 %	200 %	300 %
revient à prendre …	Le dixième	Le quart	La moitié	Les trois quarts	Le tout	Le double	Le triple
ou multiplier par …	0,1	0,25	0,5	0,75	1	2	3

Méthode : Appliquer un pourcentage (2)

Vidéo https://youtu.be/2UVaPRdSMI0

Un article coûte 89 €. Son prix est réduit de 20 %. Calculer son nouveau prix.

Méthode 1 : Réduction = 20 % de 89 €

$= \frac{20}{100} \times 89$

= 0,2 x 89

= 17,80 €

Nouveau prix = 89 – 17,80 = 71,20 €

Méthode 2 : Nouveau prix = 80 % de 89 €

$= \frac{80}{100} \times 89$

= 0,8 x 89

= 71,20 €

Méthode 3 : A l'aide d'un tableau de proportionnalité :

	Réalité↑	Pour 100↑
Ancien prix :	89	100
Nouv. Prix :	x	80*

x 0,8

* 100 – 20 = 80

x = 89 x 0,8 = 71,20 €.

Méthode : Appliquer un pourcentage (3)

Vidéo https://youtu.be/iL_U6er_I2Y
Vidéo https://youtu.be/s4GTUFJ6MZ8

1) Le prix HT *(Hors Taxe)* d'une caméra est de 436 €.
Sachant que la TVA *(Taxe à valeur ajoutée)* est de 19,6 % du prix HT, calculer le prix TTC *(Toutes Taxes Comprises)* de cette caméra. Arrondir au centième d'euro.

2) Un anorak est vendu en magasin 65,78 €. Quel est son prix HT ?

3) La taxe sur les cigarettes est différente de celle appliquée sur les autres biens de consommation.
Un paquet vendu 4,60 € comprend une taxe reversée à l'état de 3,68 €.
a) Quel est le taux en % de la taxe sur les cigarettes ?
b) Quel est le pourcentage de la taxe par rapport au prix TTC ?

1) 19,6 % de 436
= 19,6/100 x 436 = 85,456
Prix TTC = 436 + 85,456 ≈ 521,46 €

2)

Prix TTC	119,6	65,78
Prix HT	100	x

x = 65,78 x 100 : 119,6 = 55 (Quatrième proportionnelle)
Son prix HT est de 55 €.

3) a)

Prix HT	0,92	**100**
Taxe	3,68	x

On veut un pourcentage, soit pour 100.

x = 100 x 3,68 : 0,92 = 400 (Quatrième proportionnelle)
La taxe sur les cigarettes s'élève à 400 %.

b)

Prix TTC	4,60	100
Taxe	3,68	x

x = 100 x 3,68 : 4,60 = 80.
La taxe sur les cigarettes représente 80 % du prix TTC.

Méthode : Calculer une réduction

Vidéo https://youtu.be/ZoBNgFlj0Rw

Sur un tee-shirt qui coûtait 26 €, le commerçant accorde une remise de 40 %. Quel est le nouveau prix ?

Calcul de la réduction :
40 % de 26€ = $\frac{40}{100}$ x 26 = 40 : 100 x 26 = 10,40 €.

Calcul du nouveau prix :
26 – 10,40 = 15,60 €.

Le prix est de 15,60 €.

II. Calculer un pourcentage

Méthode : Calculer un pourcentage

Vidéo https://youtu.be/vAK1NWWINi8

Une automobile qui coûtait 8000 € est vendue 6800 €.
A quel pourcentage du prix initial correspond la remise ?

Méthode 1 : A l'aide d'un tableau de proportionnalité :

Choix des lignes pour construire le tableau de proportionnalité :
Observez les données de l'énoncé !

	Réalité↑	Pour 100↑
Ancien prix :	8000	100
Réduction :	1200*	x

$\xrightarrow{x0,15}$

* 8000 – 6800 = 1200

x = 100 x 0,15 = 15
Le pourcentage de réduction est de 15 %.

Méthode 2 :

Chercher le pourcentage de réduction revient à chercher :
« Quelle est la réduction sur 100 si dans la réalité la réduction est de 1200* sur 8000 ? »

Soit : $\frac{x}{100} = \frac{1200}{8000} = 0{,}15$

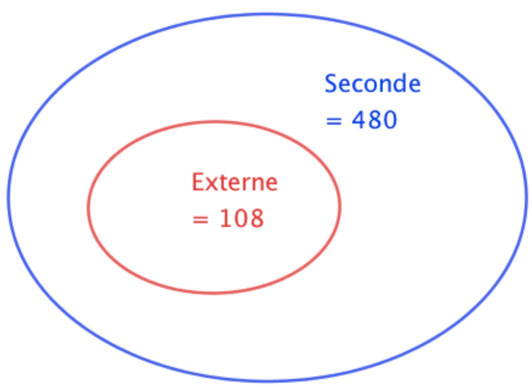
Donc x = 15

Le pourcentage de réduction est de 15 %.

III. Proportion et pourcentages

1) Proportion d'une sous-population

Exemple :
Sur les 480 élèves inscrits en classe de 2nde, 108 d'entre eux sont externes.



La **population totale** des élèves de 2nde, notée N, est égale à 480. C'est la population de référence.
La **sous-population** des élèves externes, notée n, est égale à 108.
La **proportion** d'élèves externes parmi tous les élèves de seconde, notée p, est :

$p = \frac{n}{N} = \frac{108}{480} = \frac{9}{40} = 0{,}225$.

Cette proportion peut s'exprimer en **pourcentage** : p = 22,5 %.

2) Pourcentage d'un nombre

Exemple :
Parmi les 480 élèves de seconde, 15 % ont choisi l'option grec ou latin.
15 % de 480 ont choisi l'option grec ou latin, soit :
15 % x 480 = $\frac{15}{100}$ x 480 = 72 élèves.

Méthode : Associer effectif, proportion et pourcentage

Vidéo **https://youtu.be/r8S46rk9x9k**

Une société de 75 employés compte 12 % de cadres et le reste d'ouvriers.
35 employés de cette société sont des femmes et 5 d'entre elles sont cadres.
a) Calculer l'effectif des cadres.
b) Calculer la proportion de femmes dans cette société.
c) Calculer la proportion, en %, de cadres parmi les femmes. Les femmes cadres sont-elles sous ou surreprésentées dans cette société ?

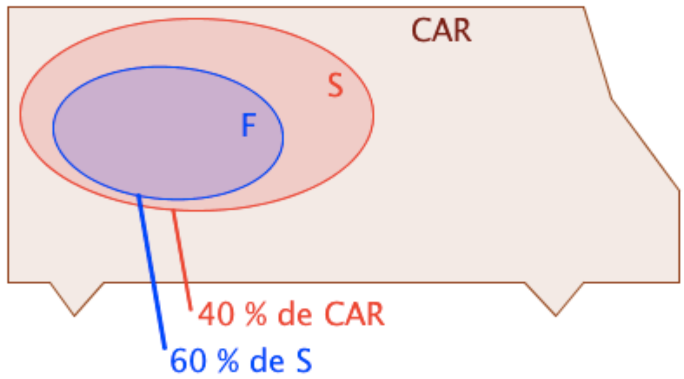
a) 12 % de 75 = $\frac{12}{100}$ x 75 = 9.
Cette société compte 9 cadres.

b) n = 35 femmes et N = 75 employés
La proportion de femmes est donc égale à $p = \frac{35}{75} = \frac{7}{15} \approx 0{,}47$.

c) n = 5 femmes cadres et N = 35 femmes. La population de référence n'est plus la même.
La proportion de cadres parmi les femmes est égale à $p = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0{,}14 = 14\%$.
14 % > 12 % donc les femmes cadres sont surreprésentées dans cette société.

3) Proportions échelonnées

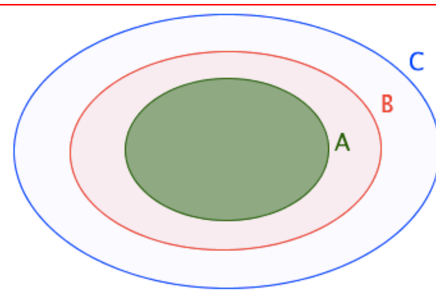
Exemple :
Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



L'ensemble F est inclus dans l'ensemble S et on a : p_F = 60 % de S.
L'ensemble S est inclus dans l'ensemble CAR et on a : p_S = 40 % de CAR.

La proportion de scolaires filles dans le CAR est donc égale à :
60 % de 40 % = 60 % x 40 % = 0,6 x 0,4 = 0,24 = 24 %.

Propriété :
$A \subset B$ et $B \subset C$.
p_1 est la proportion de A dans B.
p_2 est la proportion de B dans C.
Alors $p = p_1 \times p_2$ est la proportion de A dans C.



Méthode : Calculer des pourcentages de pourcentages

Vidéo https://youtu.be/nPPRsOW2veU

Sur 67 millions d'habitants en France, 66 % de la population est en âge de travailler (15-64 ans).
La population active représente 70 % de la population en âge de travailler.
a) Calculer la proportion de population active par rapport à la population totale.
b) Combien de français compte la population active ?

a) F est la population française.
T est la population en âge de travailler.
A est la population active.
La proportion de A dans T est 70 %.
La proportion de T dans F est 66 %.
La proportion de A dans F est donc égale à :
70 % x 66 % = 0,7 x 0,66 = 0,462 = 46,2 %.
46,2 % des français sont actifs.

b) 46,2 % de 67 = 0,462 x 67 = 30,954.
La France compte environ 31 millions d'actifs.

IV. Évolutions

1) Calculer une évolution

Propriétés et définition :

- Augmenter une valeur de t % revient à la multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer une valeur de t % revient à la multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.
- $1 + \frac{t}{100}$ et $1 - \frac{t}{100}$ sont appelés les **coefficients multiplicateurs**.

Démonstration pour l'augmentation :

Si on augmente une valeur V_0 de t % alors sa valeur V_1 après augmentation est égale à :

$V_1 = V_0 + V_0 \times \frac{t}{100} = V_0\left(1 + \frac{t}{100}\right)$.

Exemples :

Vidéo https://youtu.be/UVXFEDUnSjI

Vidéo https://youtu.be/-5QmcMuzy5I

- Le prix d'un survêtement est de 49€. Il augmente de 8%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1 + \frac{8}{100}\right) \times 49 = 1{,}08 \times 49 = 52{,}92€$.

- Le prix d'un polo est de 21€. Il diminue de 12%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1 - \frac{12}{100}\right) \times 21 = 0{,}88 \times 21 = 18{,}48€$.

Schéma :

49 augmenté de 8% → 52,92

x1,08

$\times\left(1 + \frac{8}{100}\right)$

21 diminué de 12% → 18,48

x0,88

$\times\left(1 - \frac{12}{100}\right)$

Méthode : Appliquer une augmentation ou une diminution en %

Vidéo https://youtu.be/c2s_Fta0jCo

Vidéo https://youtu.be/_HXPkDRYCYA

1) Le prix d'un blouson qui coutait 160 € est réduit de 35 %.
Calculer le nouveau prix du blouson.

2) La facture d'électricité de Bertrand a subi une augmentation de 20 % sur un an. Il a payé cette année 99 €. Calculer le prix qu'il avait payé l'année dernière.

1) 160 € est le nombre de départ. Le prix est diminué de 35 %.
Diminuer un nombre de 35 %, revient à le multiplier par 1 – $\frac{35}{100}$.
Le nouveau prix est égal à : 160 x $\left(1-\frac{35}{100}\right)$ = 160 x 0,65 = 104 €.

2) On cherche à calculer le prix de départ x (avant augmentation).
Augmenter un nombre de 20 %, revient à le multiplier par 1 + $\frac{20}{100}$.
Le nouveau prix est égal à :

$$\left(1+\frac{20}{100}\right)\times x = 99$$

Donc 1,2x = 99
$x = \frac{99}{1,2}$
x = 82,50

L'année dernière la facture de Bertrand s'élevait à 82,50 €.

2) Calculer un taux d'évolution

Définition : On considère une valeur V_0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur V_1.
Le **taux d'évolution** est égal à : $t = \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.
En pourcentage, le taux d'évolution est égal à : $t(\%) = 100 \times \frac{V_1 - V_0}{V_0}$.

Remarque :
Si $t > 0$, l'évolution est une augmentation.
Si $t < 0$, l'évolution est une diminution.

Exemple :
Vidéo https://youtu.be/Y48-iK7Cp20

La population d'un village est passé de 8500 à 10400 entre 2008 et 2012.
Calculer le taux d'évolution de la population en %.
$t = \frac{10400 - 8500}{8500} \approx 0,224$ soit 22,4%.

3) Évolutions successives

Remarque préliminaire :
Une hausse de t % suivie d'une baisse de t % ne se compensent pas.
Par exemple, si une grandeur N subit une augmentation de 10% suivie d'une diminution de

10% alors elle subit une diminution de 1%.
En effet, N x $\left(1+\frac{10}{100}\right)$ x $\left(1-\frac{10}{100}\right)$ = N x 1,1 x 0,9 = N x 0,99 = N x $\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Propriété : Si une grandeur subit des évolutions successives alors le coefficient multiplicateur global est égal aux produits des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution global

Vidéo https://youtu.be/qOg2eXd8Hv0

En 2010, la boulangerie-pâtisserie *Aux délices* a augmenté ses ventes de 10%. En 2011, elle a diminué ses ventes de 5%.
Calculer le taux d'évolution des ventes sur les deux années.

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation en 2010 est égal à : $1+\frac{10}{100}$.
Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution en 2011 est égal à : $1-\frac{5}{100}$.
Le coefficient multiplicateur sur les deux années est égal à :
$\left(1+\frac{10}{100}\right)$ x $\left(1-\frac{5}{100}\right)$ =1,1 x 0,95 = 1,045 = $1+\frac{4,5}{100}$.

Le taux d'évolution des ventes sur les deux années est donc égal à 4,5 %.

4) Évolution réciproque

Définition : On considère le taux t d'évolution de la valeur V_0 à la valeur V_1.
On appelle **évolution réciproque** le taux t' d'évolution de la valeur V_1 à la valeur V_0.

Propriété : On considère le taux t d'évolution de la valeur V_0 à la valeur V_1.
L'évolution réciproque possède un coefficient multiplicateur inverse de l'évolution directe.

Démonstration :
Si on augmente une valeur V_0 de t % alors sa valeur V_1 après augmentation est égale à :
$V_1 = V_0\left(1+\frac{t}{100}\right)$ et donc : $V_0 = V_1 \frac{1}{1+\frac{t}{100}}$.

L'évolution réciproque a donc pour coefficient multiplicateur $\frac{1}{1+\frac{t}{100}} = \frac{100}{100+t}$.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution réciproque

Vidéo https://youtu.be/NiCxHYkpNiM

1) Un magasin a des ventes en diminution de 8% sur l'année 2011.

Quel devrait être le pourcentage d'évolution sur l'année 2012 pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale ?

2) La population d'un village a augmenté de 3% sur une année puis retrouve sa valeur initiale l'année suivante.
Quel est le pourcentage de baisse sur la 2e année ?

1) Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 8 % est égal à :
$1-\frac{8}{100}=0{,}92$.
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à : $\frac{1}{0{,}92}\approx 1{,}087=1+\frac{8{,}7}{100}$.
Pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale, il faudrait qu'elles augmentent d'environ 8,7 % sur l'année 2012.

2) Le coefficient multiplicateur est égal à $1+\frac{3}{100}=1{,}03$.
Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à :
$\frac{1}{1{,}03}\approx 0{,}971=1-0{,}029=1-\frac{2{,}9}{100}$.
Sur la 2e année, la population diminue d'environ 2,9%.