POURCENTAGES



 Manuscrit italien de 1490 : « pc° »

signifiait « per cento ».

Manuscrit italien de 1684 :

On trouve le symbole proche de

la notation actuelle

 I. Appliquer un pourcentage

70 % des enfants aiment les mathématiques cela veut dire que :

sur 100 enfants, il y en a 70 qui aiment les mathématiques.

70 %

70 pour 100

70 sur 100

 70

100

*Toutes les écritures ci-dessus sont égales.*

Méthode : Appliquer un pourcentage (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Ce6E56gsbY0**](https://youtu.be/Ce6E56gsbY0)

Si 70 % des enfants aiment les mathématiques : sur un groupe de 30 enfants, combien d’entre eux devraient aimer les maths ?

On cherche les 70 % de 30 élèves.

70 % de 30 = $\frac{70}{100} $x 30

 = 70 : 100 x 30

 = 21

Dans ce contexte, 21 enfants sur 30 devraient aimer les maths.

Quelques pourcentages à connaître :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ixjag8jXLXk**](https://youtu.be/ixjag8jXLXk)

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Pourcentage | 10 % | 25 % | 50 % | 75 % | 100 % | 200 % | 300 % |
| revient à prendre … | Le dixième | Le quart | La moitié | Les trois quarts | Le tout | Le double | Le triple |
| ou multiplier par … | 0,1 | 0,25 | 0,5 | 0,75 | 1 | 2 | 3 |

Méthode : Appliquer un pourcentage (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2UVaPRdSMl0**](https://youtu.be/2UVaPRdSMl0)

Un article coûte 89 €. Son prix est réduit de 20 %. Calculer son nouveau prix.

 Méthode 1 : Réduction = 20 % de 89 €

 = $\frac{20}{100}$ x 89

 = 0,2 x 89

 = 17,80 €

 Nouveau prix = 89 – 17,80 = 71,20 €

 Méthode 2 : Nouveau prix = 80 % de 89 €

 = $\frac{80}{100}$ x 89

 = 0,8 x 89

 = 71,20 €

 Méthode 3 : A l’aide d’un tableau de proportionnalité :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ancien prix : | 89 | 100 |
| Nouv. Prix : | *x* | 80\* |

 Réalité↑ Pour 100↑

 *x 0,8* \* 100 – 20 = 80

*x* = 89 x 0,8 = 71,20 €.

Méthode : Appliquer un pourcentage (3)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iL\_U6er\_l2Y**](https://youtu.be/iL_U6er_l2Y)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/s4GTUFJ6MZ8**](https://youtu.be/s4GTUFJ6MZ8)

1) Le prix HT *(Hors Taxe)* d’une caméra est de 436 €.

Sachant que la TVA *(Taxe à valeur ajoutée)* est de 19,6 % du prix HT, calculer le prix TTC *(Toutes Taxes Comprises)* de cette caméra. Arrondir au centième d’euro.

2) Un anorak est vendu en magasin 65,78 €. Quel est son prix HT ?

3) La taxe sur les cigarettes est différente de celle appliquée sur les autres biens de consommation.

Un paquet vendu 4,60 € comprend une taxe reversée à l’état de 3,68 €.

 a) Quel est le taux en % de la taxe sur les cigarettes ?

 b) Quel est le pourcentage de la taxe par rapport au prix TTC ?

1) 19,6 % de 436

 = 19,6/100 x 436 = 85,456

Prix TTC = 436 + 85,456 ≈ 521,46 €

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Prix TTC | 119,6 | 65,78 |
| Prix HT | 100 | *x* |

2)

*x* = 65,78 x 100 : 119,6 = 55 (Quatrième proportionnelle)

Son prix HT est de 55 €.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Prix HT | 0,92 | **100** |
| Taxe | 3,68 | *x* |

3) a)On veut un pourcentage, soit pour 100.

*x* = 100 x 3,68 : 0,92 = 400 (Quatrième proportionnelle)

La taxe sur les cigarettes s’élève à 400 %.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Prix TTC | 4,60 | 100 |
| Taxe | 3,68 | *x* |

b)

*x* = 100 x 3,68 : 4,60 = 80.

La taxe sur les cigarettes représente 80 % du prix TTC.

Méthode : Calculer une réduction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ZoBNgFIj0Rw**](https://youtu.be/ZoBNgFIj0Rw)

Sur un tee-shirt qui coûtait 26 €, le commerçant accorde une remise de 40 %. Quel est le nouveau prix ?

Calcul de la réduction :

40 % de 26€ = $\frac{40}{100}$ x 26 = 40 : 100 x 26 = 10,40 €.

Calcul du nouveau prix :

26 – 10,40 = 15,60 €.

Le prix est de 15,60 €.

II. Calculer un pourcentage

Méthode : Calculer un pourcentage

 **Vidéo** [**https://youtu.be/vAK1NWWINi8**](https://youtu.be/vAK1NWWINi8)

Une automobile qui coûtait 8000 € est vendue 6800 €.

A quel pourcentage du prix initial correspond la remise ?

Méthode 1 : A l’aide d’un tableau de proportionnalité :

*Choix des lignes pour construire le tableau de proportionnalité :*

*Observez les données de l’énoncé !*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Ancien prix : | 8000 | 100 |
|  Réduction : | 1200\* | *x* |

 Réalité↑ Pour 100↑

 *x0,15* \* 8000 – 6800 = 1200

 *x* = 100 x 0,15 = 15

 Le pourcentage de réduction est de 15 %.

Méthode 2 :

Chercher le pourcentage de réduction revient à chercher :

« Quelle est la réduction sur 100 si dans la réalité la réduction est de 1200\* sur 8000 ? »

Soit : $\frac{x}{100}$ = $\frac{1200}{8000} $= 0,15

Donc *x* = 15

Le pourcentage de réduction est de 15 %.

III. Proportion et pourcentages

1) Proportion d’une sous-population

Exemple :

Sur les 480 élèves inscrits en classe de 2nde, 108 d’entre eux sont externes.



La **population totale** des élèves de 2nde, notée *N*, est égale à 480. C’est la population de référence.

La **sous-population** des élèves externes, notée *n*, est égale à 108.

La **proportion** d’élèves externes parmi tous les élèves de seconde, notée *p*, est :

$p=$ $\frac{n}{N}$ = $\frac{108}{480}$ = $\frac{9}{40}$ = 0,225.

Cette proportion peut s’exprimer en **pourcentage** : *p =* 22,5 %.

 2) Pourcentage d’un nombre

Exemple :

Parmi les 480 élèves de seconde, 15 % ont choisi l’option grec ou latin.

15 % de 480 ont choisi l’option grec ou latin, soit :

15 % x 480 = $\frac{15}{100}$ x 480 = 72 élèves.

Méthode : Associer effectif, proportion et pourcentage

 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8S46rk9x9k**](https://youtu.be/r8S46rk9x9k)

Une société de 75 employés compte 12 % de cadres et le reste d’ouvriers.

35 employés de cette société sont des femmes et 5 d’entre elles sont cadres.

a) Calculer l’effectif des cadres.

b) Calculer la proportion de femmes dans cette société.

c) Calculer la proportion, en %, de cadres parmi les femmes. Les femmes cadres sont-elles sous ou surreprésentées dans cette société ?

a) 12 % de 75 = $\frac{12}{100}$ x 75 = 9.

Cette société compte 9 cadres.

b) *n* = 35 femmes et *N* = 75 employés

La proportion de femmes est donc égale à $p $= $\frac{35}{75}$ = $\frac{7}{15}$ $≈$ 0,47.

c) *n* = 5 femmes cadres et *N* = 35 femmes. La population de référence n’est plus la même.

La proportion de cadres parmi les femmes est égale à $p $= $\frac{5}{35}$ = $\frac{1}{7}$ $≈$ 0,14 = 14%.

14 % > 12 % donc les femmes cadres sont surreprésentées dans cette société.

 3) Proportions échelonnées

Exemple :

Dans un car, il y a 40 % de scolaires. Et parmi les scolaires, 60 % sont des filles.



L’ensemble F est inclus dans l’ensemble S et on a : *pF* = 60 % de S.

L’ensemble S est inclus dans l’ensemble CAR et on a : *pS* = 40 % de CAR.

La proportion de scolaires filles dans le CAR est donc égale à :

60 % de 40 % = 60 % x 40 % = 0,6 x 0,4 = 0,24 = 24 %.

Propriété :

AB et BC.

*p1* est la proportion de A dans B.

*p2* est la proportion de B dans C.

Alors *p* = *p1* x *p2* est la proportion de A dans C.

Méthode : Calculer des pourcentages de pourcentages

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nPPRsOW2veU**](https://youtu.be/nPPRsOW2veU)

Sur 67 millions d’habitants en France, 66 % de la population est en âge de travailler (15-64 ans).

La population active représente 70 % de la population en âge de travailler.

a) Calculer la proportion de population active par rapport à la population totale.

b) Combien de français compte la population active ?

a) F est la population française.

 T est la population en âge de travailler.

 A est la population active.

La proportion de A dans T est 70 %.

La proportion de T dans F est 66 %.

La proportion de A dans F est donc égale à :

70 % x 66 % = 0,7 x 0,66 = 0,462 = 46,2 %.

46,2 % des français sont actifs.

b) 46,2 % de 67 = 0,462 x 67 = 30,954.

La France compte environ 31 millions d’actifs.

IV. Évolutions

 1) Calculer une évolution

Propriétés et définition :

- Augmenter une valeur de *t* % revient à la multiplier par 1 + $\frac{t}{100}$.

- Diminuer une valeur de *t* % revient à la multiplier par 1 – $\frac{t}{100}$.

- 1 + $\frac{t}{100}$ et 1 – $\frac{t}{100}$ sont appelés les **coefficients multiplicateurs**.

Démonstration pour l'augmentation :

Si on augmente une valeur *V*0 de *t* % alors sa valeur *V*1 après augmentation est égale à :

*V*1 = *V*0 + *V*0 x $\frac{t}{100}$ = *V*0$\left(1+\frac{t}{100}\right)$.

Exemples :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UVXFEDUnSjI**](https://youtu.be/UVXFEDUnSjI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-5QmcMuzy5I**](https://youtu.be/-5QmcMuzy5I)

- Le prix d'un survêtement est de 49€. Il augmente de 8%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1+\frac{8}{100}\right)×49=1,08×49=52,92€$ .

- Le prix d'un polo est de 21€. Il diminue de 12%.

Son nouveau prix est égal à $\left(1-\frac{12}{100}\right)×21=0,88×21=18,48€$.

Schéma :

 49 augmenté de 8% → 52,92 21 diminué de 12% → 18,48

 x1,08 x0,88

 $×\left(1+\frac{8}{100}\right)$ $×\left(1-\frac{12}{100}\right)$

Méthode : Appliquer une augmentation ou une diminution en %

 **Vidéo** [**https://youtu.be/c2s\_Fta0jCo**](https://youtu.be/c2s_Fta0jCo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_HXPkDRYCYA**](https://youtu.be/_HXPkDRYCYA)

1) Le prix d'un blouson qui coutait 160 € est réduit de 35 %.

Calculer le nouveau prix du blouson.

2) La facture d'électricité de Bertrand a subi une augmentation de 20 % sur un an. Il a payé cette année 99 €. Calculer le prix qu'il avait payé l'année dernière.

1) 160 € est le nombre de départ. Le prix est diminué de 35 %.

*Diminuer un nombre de 35 %, revient à le multiplier par* 1 – $\frac{35}{100}$*.*

Le nouveau prix est égal à : 160 x **** = 160 x 0,65 = 104 €.

2) On cherche à calculer le prix de départ *x* (avant augmentation).

Augmenter un nombre de 20 %, revient à le multiplier par 1 + $\frac{20}{100}$.

Le nouveau prix est égal à :

$$ \left(1+\frac{20}{100}\right)×x=99$$

 Donc 1,2*x* = 99

$$ x=\frac{99}{1,2}$$

 *x* = 82,50

L'année dernière la facture de Bertrand s'élevait à 82,50 €.

 2) Calculer un taux d'évolution

Définition : On considère une valeur *V*0 qui subit une évolution pour arriver à une valeur *V*1.

Le **taux d'évolution** est égal à : $t=$ $\frac{V\_{1}-V\_{0}}{V\_{0}}$.

En pourcentage, le taux d'évolution est égal à : $t\left(\%\right)=100×$ $\frac{V\_{1}-V\_{0}}{V\_{0}}$.

Remarque :

Si $t>0$, l'évolution est une augmentation.

Si $t<0$, l'évolution est une diminution.

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Y48-iK7Cp20**](https://youtu.be/Y48-iK7Cp20)

La population d'un village est passé de 8500 à 10400 entre 2008 et 2012.

Calculer le taux d'évolution de la population en %.

$t=$ $\frac{10400-8500}{8500}$ $≈0,224$ soit 22,4%.

 3) Évolutions successives

Remarque préliminaire :

Une hausse de *t* % suivie d'une baisse de *t* % ne se compensent pas.

Par exemple, si une grandeur N subit une augmentation de 10% suivie d'une diminution de 10% alors elle subit une diminution de 1%.

En effet, N x $\left(1+\frac{10}{100}\right)$ x $\left(1-\frac{10}{100}\right)$ = N x 1,1 x 0,9 = N x 0,99 = N x $\left(1-\frac{1}{100}\right)$.

Propriété : Si une grandeur subit des évolutions successives alors le coefficient multiplicateur global est égal aux produits des coefficients multiplicateurs de chaque évolution.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution global

 **Vidéo** [**https://youtu.be/qOg2eXd8Hv0**](https://youtu.be/qOg2eXd8Hv0)

En 2010, la boulangerie-pâtisserie *Aux délices* a augmenté ses ventes de 10%. En 2011, elle a diminué ses ventes de 5%.

Calculer le taux d'évolution des ventes sur les deux années.

Le coefficient multiplicateur correspondant à l'augmentation en 2010 est égal à : 1 + $\frac{10}{100}$.

Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution en 2011 est égal à : 1 – $\frac{5}{100}$.

Le coefficient multiplicateur sur les deux années est égal à :

$\left(1+\frac{10}{100}\right)$ x $\left(1-\frac{5}{100}\right)$ =1,1 x 0,95 = 1,045 = 1 + $\frac{4,5}{100}$.

Le taux d'évolution des ventes sur les deux années est donc égal à 4,5 %.

 4) Évolution réciproque

Définition : On considère le taux *t* d'évolution de la valeur *V*0 à la valeur *V*1.

On appelle **évolution réciproque** le taux *t'* d'évolution de la valeur *V*1 à la valeur *V*0.

Propriété : On considère le taux *t* d'évolution de la valeur *V*0 à la valeur *V*1.

L'évolution réciproque possède un coefficient multiplicateur inverse de l'évolution directe.

Démonstration :

Si on augmente une valeur *V*0 de *t* % alors sa valeur *V*1 après augmentation est égale à :

*V*1 = *V*0$\left(1+\frac{t}{100}\right)$ et donc : *V*0 = *V*1 $\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$.

L'évolution réciproque a donc pour coefficient multiplicateur $\frac{1}{1+\frac{t}{100}}$ = $\frac{100}{100+t}$.

Méthode : Déterminer un taux d'évolution réciproque

 **Vidéo** [**https://youtu.be/NiCxHYkpNiM**](https://youtu.be/NiCxHYkpNiM)

1) Un magasin a des ventes en diminution de 8% sur l'année 2011.

Quel devrait être le pourcentage d'évolution sur l'année 2012 pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale ?

2) La population d’un village a augmenté de 3% sur une année puis retrouve sa valeur initiale l’année suivante.

Quel est le pourcentage de baisse sur la 2e année ?

1) Le coefficient multiplicateur correspondant à la diminution de 8 % est égal à :

1 – $\frac{8}{100}$ = 0,92.

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à : $\frac{1}{0,92}$ $≈$ 1,087 = 1 + $\frac{8,7}{100}$.

Pour que les ventes retrouvent leur valeur initiale, il faudrait qu'elles augmentent d'environ 8,7 % sur l'année 2012.

2) Le coefficient multiplicateur est égal à 1 + $\frac{3}{100}$ = 1,03.

Le coefficient multiplicateur de l'évolution réciproque est égal à :

$\frac{1}{1,03}$ $≈$ 0,971 = 1 – 0,029 = 1 – $\frac{2,9}{100}$.

Sur la 2e année, la population diminue d’environ 2,9%.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)