LIMITES, CONTINUITÉ, CONVEXITÉ

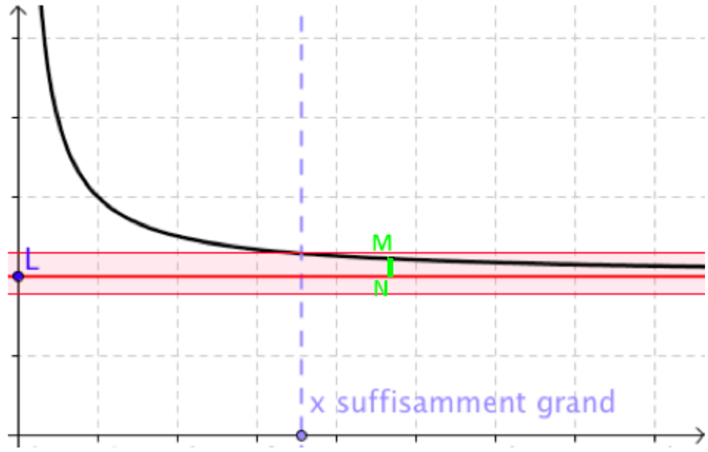
I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi proche de L que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$ a pour limite 2 lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que x est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.
Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que x est suffisamment grand.



Définition :
On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

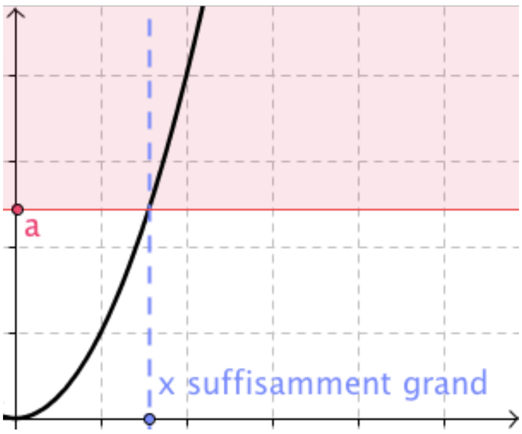
Définitions : - La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.
- La droite d'équation $y = L$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction f en $-\infty$ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarque :
Lorsque x tend vers $+\infty$, la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote.
La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

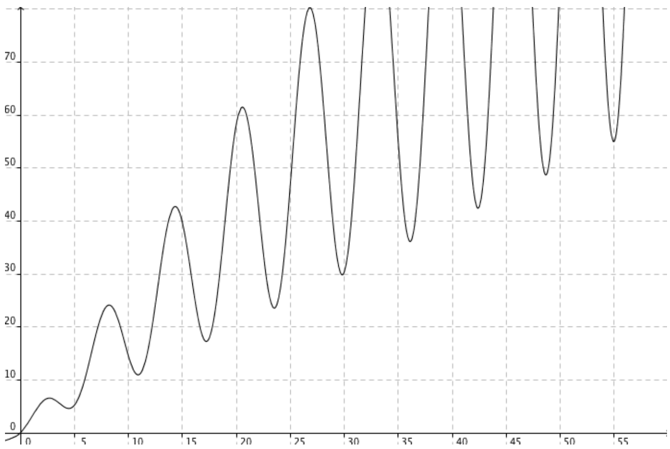
Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment grand.

Exemple :
La fonction définie par $f(x) = x^2$ a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment grand.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment grand.

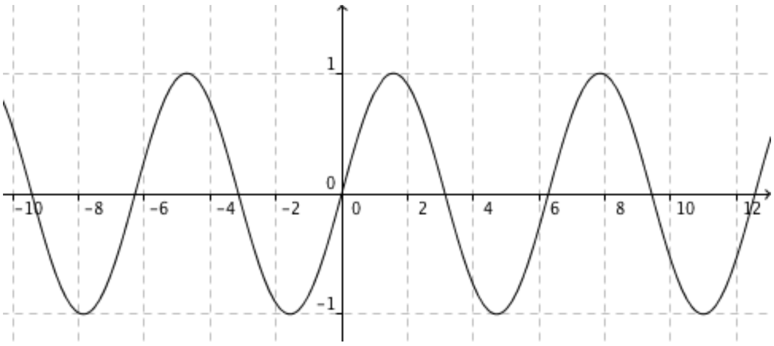


Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand et on note : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Remarques :
- Une fonction qui tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



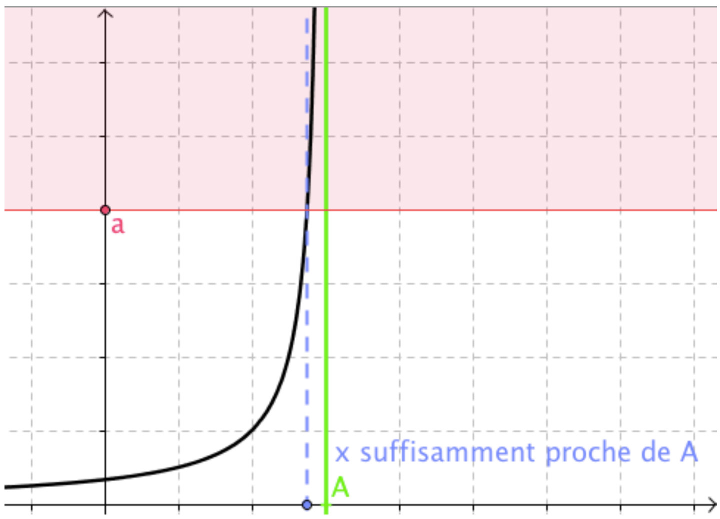
3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$ (pour n pair)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$ (pour n impair)
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un réel A

Intuitivement :
On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de A.

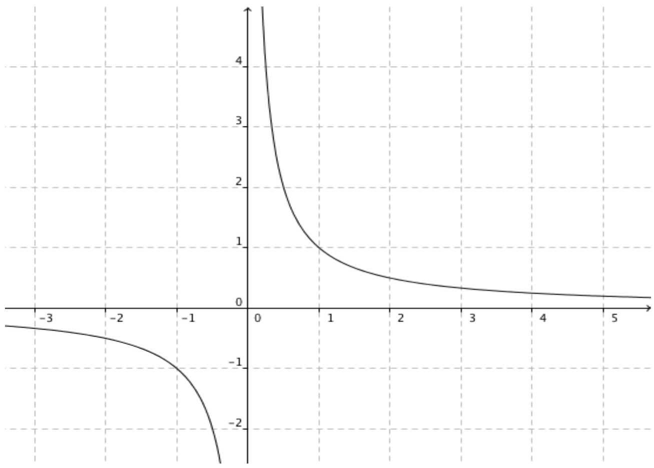
Exemple :
La fonction représentée ci-dessous a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers A.
En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que x est suffisamment proche de A.
Si on prend un réel a quelconque, l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$ contient toutes les valeurs de la fonction dès que x est suffisamment proche de A.



Définitions : - On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ en A si tout intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$.
- On dit que la fonction f admet pour limite $-\infty$ en A si tout intervalle $]-\infty\,;\,b[$, b réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment proche de A et on note : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Définition : La droite d'équation $x = A$ est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction f, si : $\lim\limits_{x \to A} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to A} f(x) = -\infty$.

Remarque :
Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel A selon $x > A$ ou $x < A$.
Considérons la fonction inverse définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
- Si $x < 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $-\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$.
- Si $x > 0$: Lorsque x tend vers 0, $f(x)$ tend vers $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.



On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :
Vidéo https://youtu.be/9nEJCL3s2eU

III. Opérations sur les limites

Vidéo https://youtu.be/at6pFx-Umfs

α peut désigner $+\infty$, $-\infty$ ou un nombre réel.

1) Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)+g(x) =$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.*

* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

2) Limite d'un produit

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	L'	∞	∞	∞
$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)g(x) =$	$L\,L'$	∞	∞	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)$?

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(3+x^2)=+\infty$

D'après la règle sur la limite d'un produit : $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-5)(3+x^2)=-\infty$

3) Limite d'un quotient

∞ désigne $+\infty$ ou $-\infty$

$\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) =$	L	$L\neq 0$	L	∞	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} g(x) =$	$L'\neq 0$	0	∞	L	∞	0
$\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} =$	$\dfrac{L}{L'}$	∞	0	∞	F.I.	F.I.

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple : $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{1-2x}{x-3}$?

$\lim\limits_{x\to3} 1-2x=-5$

$\lim\limits_{x\to3^-} x-3=0^-$ et $\lim\limits_{x\to3^+} x-3=0^+$

D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{1-2x}{x-3}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to3^+}\dfrac{1-2x}{x-3}=-\infty$

Remarque :
Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

$$"\infty - \infty", "0 \times \infty", "\frac{\infty}{\infty}" \text{ et } "\frac{0}{0}".$$

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

Vidéo https://youtu.be/4NQbGdXThrk
Vidéo https://youtu.be/8tAVa4itblc
Vidéo https://youtu.be/pmWPfsQaRWI

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5}$ 3) $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1}$

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2 = +\infty$

On reconnait une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination (méthode de la factorisation par le monôme de plus haut degré) :

$$-3x^3+2x^2-6x+1 = x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$$

• Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{6}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^3} = 0$.
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} -3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3} = -3$$

De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3\left(-3+\frac{2}{x}-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

Soit : $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^3+2x^2-6x+1 = -\infty$.

2) • En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".
• Levons l'indétermination :

$$\frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{x^2}{x^2} \times \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}}$$

• Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{x^2} = 0$.
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} 6-\frac{5}{x^2} = 6$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{6-\frac{5}{x^2}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Soit : $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2-5x+1}{6x^2-5} = \frac{1}{3}$.

3) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{\infty}{\infty}$".

• Levons l'indétermination :

$$\frac{3x^2+2}{4x-1} = \frac{x^2}{x} \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}}$$

• Or : $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{x^2} = 0$
Donc, par limite d'une somme :

$$\lim_{x\to-\infty} 3+\frac{2}{x^2} = 3 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} 4-\frac{1}{x} = 4$$

Donc, par limite d'un quotient :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = \frac{3}{4}$$

De plus, $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc, par limite d'un produit :

$$\lim_{x\to-\infty} x \times \frac{3+\frac{2}{x^2}}{4-\frac{1}{x}} = -\infty$$

Soit : $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+2}{4x-1} = -\infty$.

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

Vidéo https://youtu.be/n3XapvUfXJQ
Vidéo https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU

Calculer : 1) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ 2) $\lim_{x\to5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

1) • $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

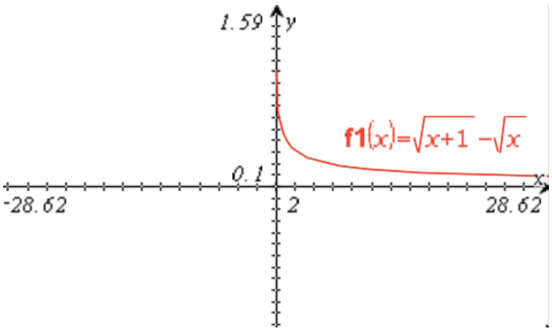
• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2 - \left(\sqrt{x}\right)^2}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{x+1-x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

• Par limite d'une somme : $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}+\sqrt{x} = +\infty$.
Et donc, par limite d'un quotient : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}} = 0$.
Soit $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = 0$.

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$.

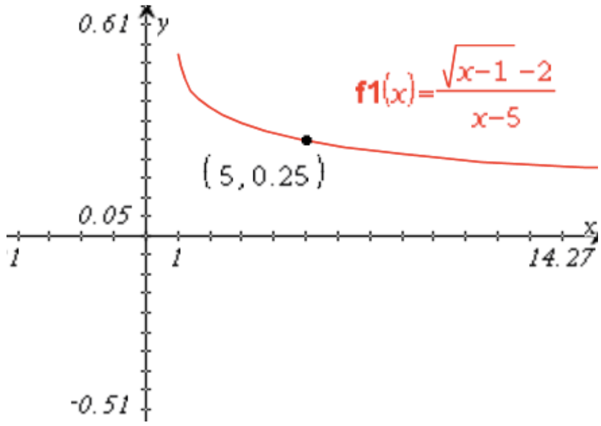


2) • $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1}-2 = \sqrt{5-1}-2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 5} x-5 = 5-5 = 0$
Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\frac{0}{0}$".

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :
$$\frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\left(\sqrt{x-1}-2\right)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{x-1-4}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{x-5}{(x-5)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{x-1}+2}$$

• Or $\lim\limits_{x\to 5} \sqrt{x-1}+2 = \sqrt{5-1}+2 = 4$
Donc, par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{1}{\sqrt{x-1}+2} = \frac{1}{4}$.
Soit : $\lim\limits_{x\to 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{1}{4}$.
En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$, il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant le point de coordonnées (5 ; 0,25).

Attention cependant, la calculatrice ne fait pas nécessairement apparaître que la fonction f n'est pas définie en 5.



Méthode : Déterminer une asymptote

Vidéo https://youtu.be/0LDGK-QkL80
Vidéo https://youtu.be/pXDhrx-nMto

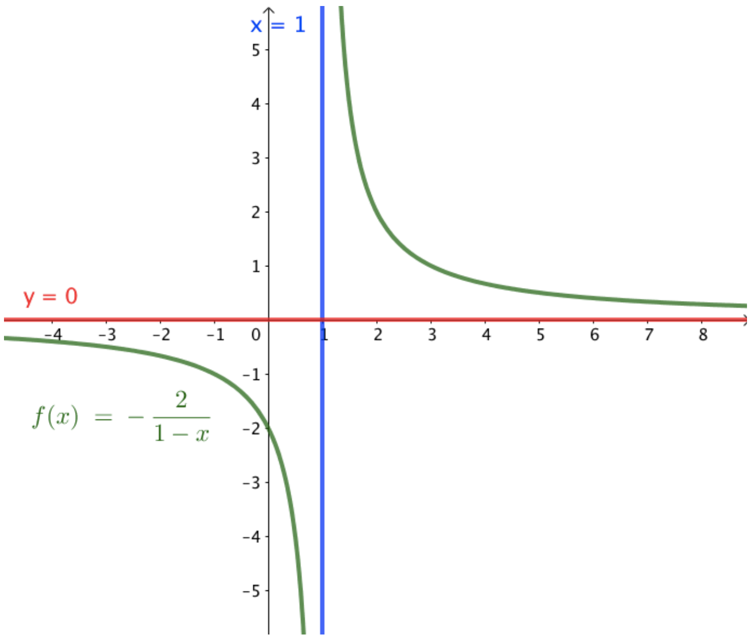
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \frac{-2}{1-x}$.
Démontrer que la courbe représentative de la fonction f admet des asymptotes dont on précisera les équations.

- $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$ donc par limite d'un quotient, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.
On prouve de même que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{-2}{1-x} = 0$.
On en déduit que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

- $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} 1 - x = 0^-$
D'après la règle sur la limite d'un quotient : $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{-2}{1-x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{-2}{1-x} = +\infty$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f à gauche de 1 et à droite de 1.

En traçant, à l'aide de la calculatrice, la courbe de la fonction f, il est possible de vérifier les résultats.



IV. Limite d'une fonction composée

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

Vidéo https://youtu.be/DNU1M3li76k

Soit la fonction f définie sur $\left]\frac{1}{2} ; +\infty\right[$ par : $f(x) = \sqrt{2 - \frac{1}{x}}$

Calculer la limite de la fonction f en $+\infty$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 - \frac{1}{x} = 2$

Donc, comme limite de fonction composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{2 - \frac{1}{x}} = \sqrt{2}$

On peut en effet poser $X = 2 - \frac{1}{x}$ et calculer $\lim\limits_{X \to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$.

V. Limites et comparaisons

1) Théorèmes de comparaisons

Théorème : Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle $]a ; +\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x)$.
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ (figure 1)
- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (figure 2)
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ (figure 3)
- Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction f pousse la fonction g vers $+\infty$ pour des valeurs de x suffisamment grandes.

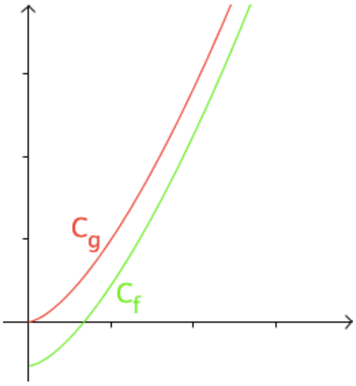


Figure 1

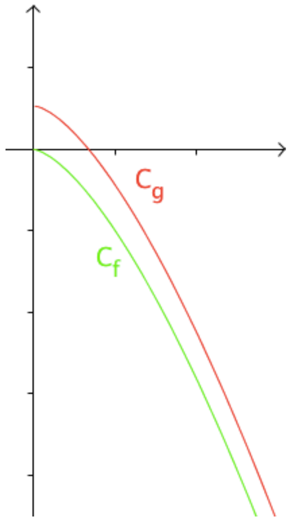


Figure 2

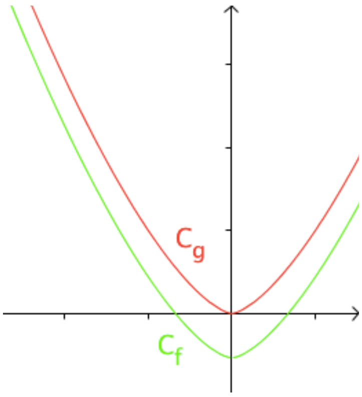


Figure 3

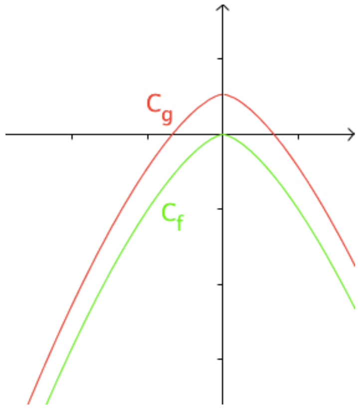


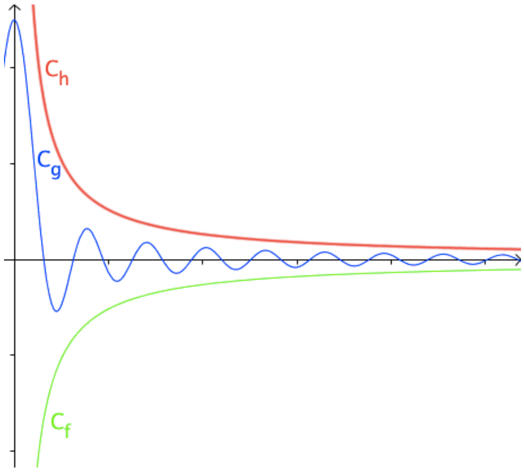
Figure 4

<u>Démonstration dans le cas de la figure 1 :</u>
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc tout intervalle $]m\,;\,+\infty[$, m réel, contient toutes les valeurs de $f(x)$ dès que x est suffisamment grand, soit : $f(x) > m$.
Or, dès que x est suffisamment grand, on a $f(x) \leq g(x)$.
Donc dès que x est suffisamment grand, on a : $g(x) > m$.
Et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2) <u>Théorème d'encadrement</u>

<u>Théorème des gendarmes :</u> Soit f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle $]a\,;\,+\infty[$, a réel, telles que pour tout $x > a$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

<u>Remarque :</u> On obtient un théorème analogue en $-\infty$.



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions f et h (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction g pour des valeurs de x suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

Vidéo https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y
Vidéo https://youtu.be/Eo1jvPphja0

Calculer : 1) $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x$ 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}$

1) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \sin x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• Pour tout x, $-1 \leq \sin x$ donc : $x-1 \leq x+\sin x$.

• Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x-1=+\infty$ donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x\to+\infty} x+\sin x=+\infty$$

2) • $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos x$ n'existe pas.
Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :
• Pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$ donc : $-x \leq x\cos x \leq x$, car $x>0$
Et donc :

$$-\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$$
$$-\frac{x}{x^2} \leq -\frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2}$$

Soit : $-\frac{1}{x} \leq \frac{x\cos x}{x^2+1} \leq \frac{1}{x}$

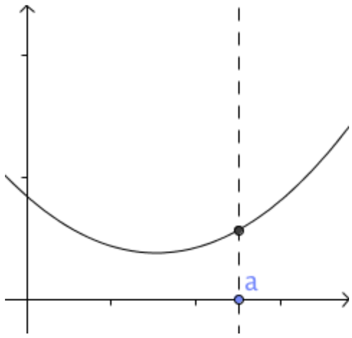
• Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}=0$

D'après le théorème des gendarmes, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+1}=0$.

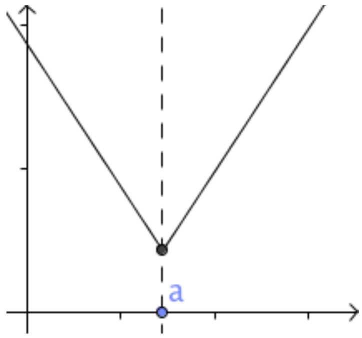
VI. Notion de continuité

Vidéo https://youtu.be/XpjKserte6o

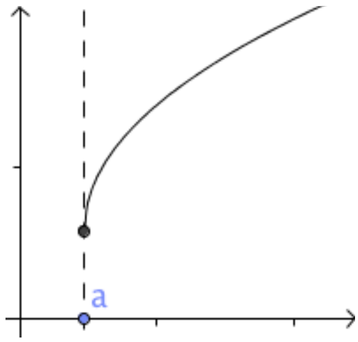
Exemples et contre-exemples :



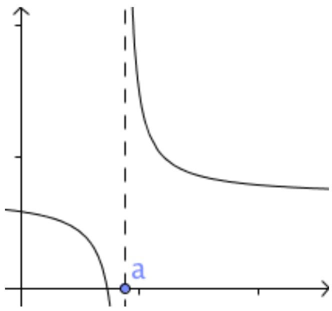
f est continue en a



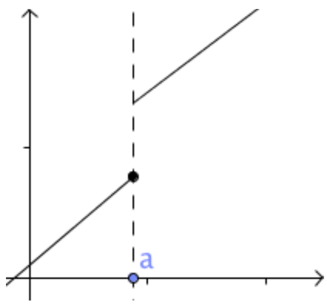
f est continue en a



f est continue en a



f n'est pas continue en a



f n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
- f est continue en a si : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- f est continue sur I si f est continue en tout point de I.

Exemples :
- Les fonctions $x \longmapsto |x|$, $x \longmapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions $x \longmapsto \sin x$ et $x \longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0\,;\,+\infty[$.
- La fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $]-\infty\,;0[$ et elle est continue sur $]0\,;+\infty[$.

Remarque :
Les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur cet intervalle.

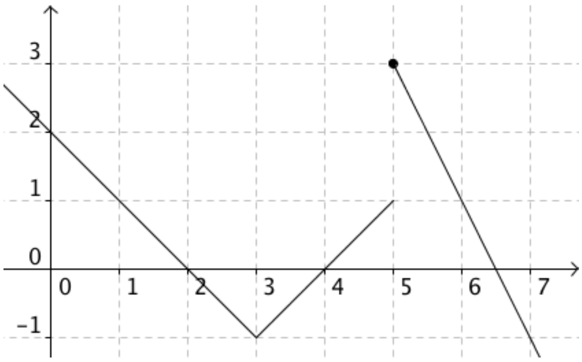
Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/03WMLyc7rLE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x+2, \ pour\ x < 3. \\ x-4, \ pour\ 3 \leq x < 5 \\ -2x+13, \ pour\ x \geq 5 \end{cases}$

La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Les fonctions $x \longmapsto -x+2$, $x \longmapsto x-4$ et $x \longmapsto -2x+13$ sont des fonctions polynômes donc continues sur $\mathbb{R}$.
Ainsi la fonction f est continue sur $]-\infty\,;3[$, sur $[3\,;\ 5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.



Étudions alors la continuité de f en 3 et en 5 :

- $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} -x+2 = -3+2 = -1$
$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} x-4 = 3-4 = -1$
Donc : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = f(3)$
donc la fonction f est continue en 3.

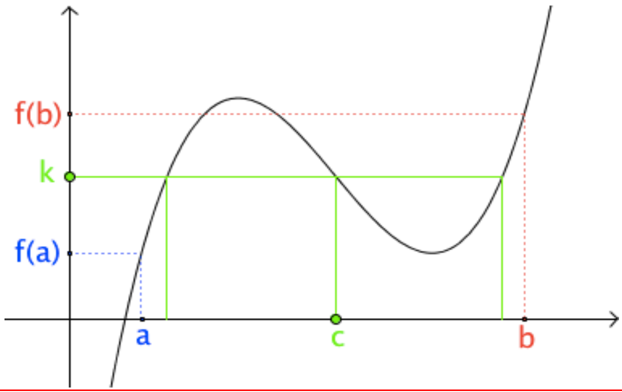
- $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} x-4 = 5-4 = 1$
$\lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} -2x+13 = -2\times 5+13 = 3$

La limite de f en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.
La fonction f n'est donc pas continue en 5.

La fonction f est continue sur $]-\infty\,;5[$ et sur $[5\,;\ +\infty[$.

VII. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :
On considère la fonction f définie et continue sur un intervalle $[a\,;\,b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



<u>Conséquence :</u>
Dans ces conditions, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a\ ;\ b]$.

<u>Cas particuliers :</u>
- Dans le cas où la fonction f est strictement monotone sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$ alors le réel c est unique.
- Dans le cas où $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires alors il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Dans la pratique, pour démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[a\ ;\ b]$, on démontre que :

1. f est continue sur $[a\ ;\ b]$,
2. f change de signe sur $[a\ ;\ b]$,
3. f est strictement monotone sur $[a\ ;\ b]$.

Les conditions 1 et 2 nous assurent de l'existence de la solution. La condition 3 apporte en plus son unicité.

<u>Méthode :</u> Résolution approchée d'une équation

EXEMPLE 1

Vidéo https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y

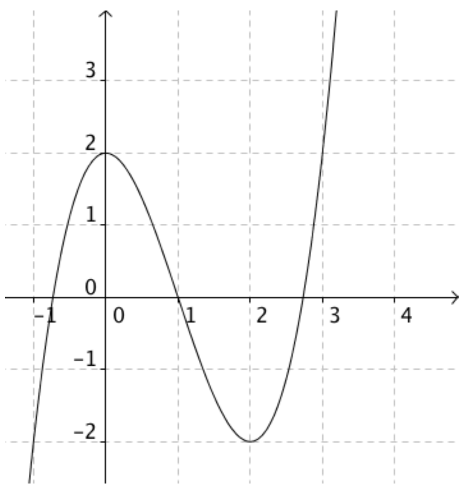
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.
1) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.
2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution α.

1) • <u>Existence de la solution :</u>
- La fonction f est **continue** sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.
- $f(2{,}5) = 2{,}5^3 - 3 \times 2{,}5^2 + 2 = -1{,}125 < 0$
$f(5) = 5^3 - 3 \times 5^2 + 2 = 52 > 0$

Donc la fonction f **change de signe** sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution.

• <u>Unicité de la solution :</u>
$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$
Donc, pour tout x de $[2{,}5\ ;5]$, $f'(x) > 0$.
La fonction f est donc **strictement croissante** sur l'intervalle $[2{,}5\ ;5]$.
On en déduit que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $[2{,}5\ ;5]$.



2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

Vidéo TI https://youtu.be/MEkh0fxPakk

Vidéo Casio https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ
Vidéo HP https://youtu.be/93mBoNOpEWg

X	Y1
0	2
1	0
2	-2
3	2
4	18
5	52
6	110

La solution est comprise entre 2 et 3.

X	Y1
2	-2
2.1	-1.969
2.2	-1.872
2.3	-1.703
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704

La solution est supérieure à 2,6

X	Y1
2.4	-1.456
2.5	-1.125
2.6	-.704
2.7	-.187
2.8	.432
2.9	1.159
3	2

La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

X	Y1
2.7	-.187
2.71	-.1298
2.72	-.0716
2.73	-.0123
2.74	.04802
2.75	.10938
2.76	.17178

La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que $2{,}73 < \alpha < 2{,}74$.

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

EXEMPLE 2

Vidéo https://youtu.be/UmGQf7gkvLg

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 6$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

- f est continue sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 + 6 = 1$

$f(4) = 4^3 - 4 \times 4^2 + 6 = 6$
Donc 2 est compris entre $f(-1)$ et $f(4)$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution sur l'intervalle [–1 ; 4].

VIII. Fonction convexe et fonction concave

1) Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I dont la dérivée f' est dérivable sur I.

On appelle **fonction dérivée seconde** de f sur I la dérivée de f' et on note :

$f''(x) = \left(f'(x)\right)'$.

Exemple :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^3 - 5x^2 + 1$.

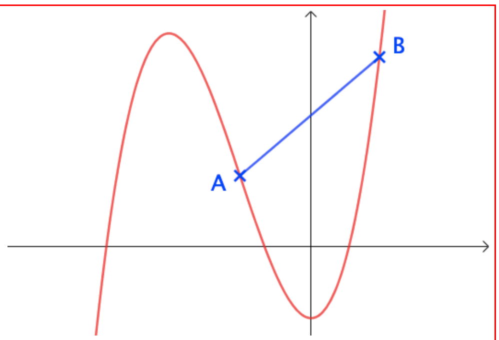
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 9x^2 - 10x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = \left(f'(x)\right)' = 18x - 10$.

Vidéo https://youtu.be/ERML85y_s6E

2) Définitions avec les cordes

Définition : Une **corde** est un segment reliant deux points d'une courbe.

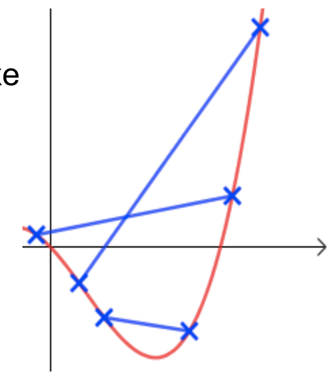


Définitions : Soit une fonction f définie sur un intervalle I.

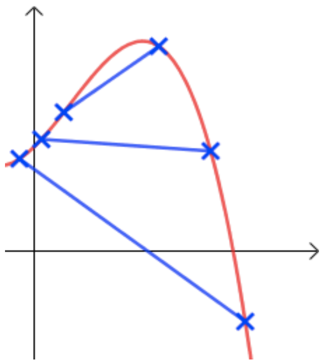
- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.

Fonction convexe



Fonction concave

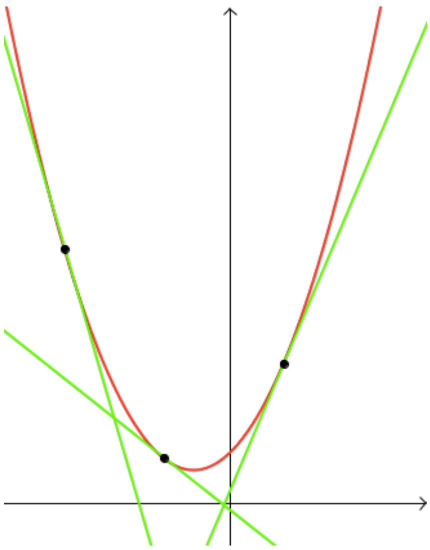


3) Définitions avec les tangentes

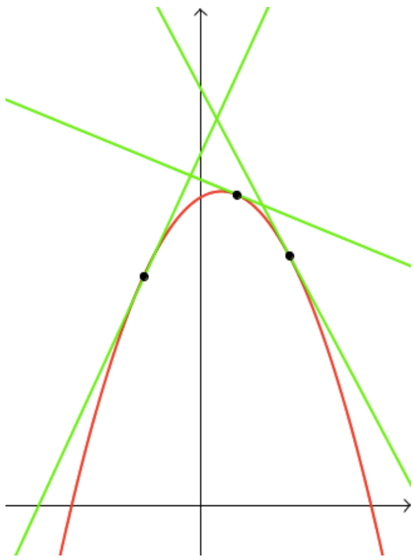
Définitions : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction f est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe



Fonction concave

4) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré $x \longmapsto x^2$ est convexe sur $\mathbb{R}$.

- La fonction cube $x \longmapsto x^3$ est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;\,+\infty[$.

- La fonction inverse $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est concave sur $]-\infty\,;0[$ et convexe sur $]0\,;\,+\infty[$.

- La fonction racine carrée $x \longmapsto \sqrt{x}$ est concave sur $[0\,;\,+\infty[$.

Propriété : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Dire que la fonction f est convexe sur I, revient à dire que sa dérivée f' est croissante sur I, soit :

$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \text{ de I.}$$

- Dire que la fonction f est concave sur I, revient à dire que sa dérivée f' est décroissante sur I, soit :

$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \text{ de I.}$$

Démonstration :
Vidéo https://youtu.be/-OG8l5Batuo

- Démontrons que f est convexe, si f' est croissante :
On considère la fonction g dérivable sur I et définie par :
$g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$.
Alors : $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur I, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = 0$. Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$.
On peut donc compléter le tableau de variations de g.

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

En effet : $g(a) = f(a) - f'(a)(a-a) - f(a) = 0$
Donc $g(x) \geq 0$ sur I.
Soit $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
On en déduit que la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que f est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que f est concave, si f' est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/8H2aYKN8NGE

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.
Étudier la convexité de la fonction f.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = x^2 - 18x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 2x - 18$ qui s'annule pour $x = 9$.

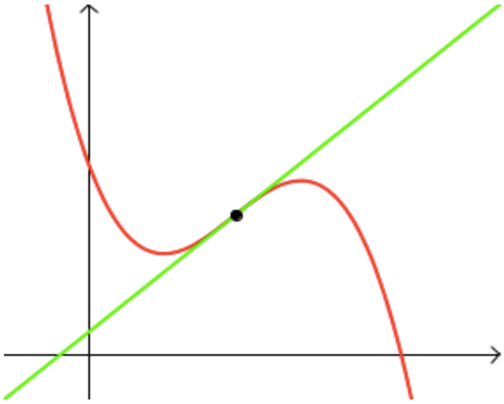
Pour tout $x \leq 9$, $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq 9$, $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty\,;9]$ et f est convexe sur $[9\,;\,+\infty[$.

IX. Point d'inflexion

Vidéo https://youtu.be/r8sYr6ToeLo

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.
Un **point d'inflexion** est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

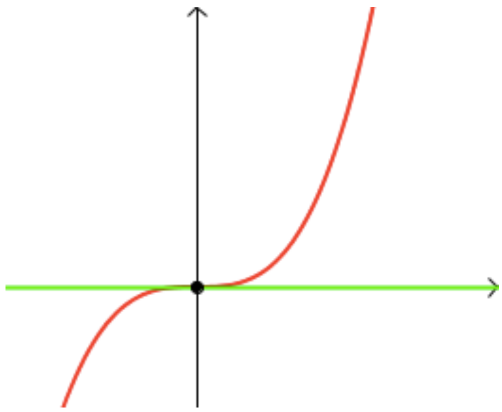


Remarque importante :
Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :
On considère la fonction cube $x \longmapsto x^3$.
La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour $x \leq 0$, la courbe est en dessous de sa tangente.
Pour $x \geq 0$, la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.
Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.



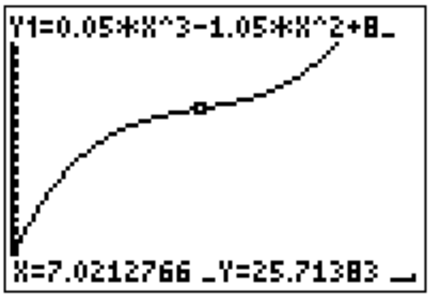
Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

Vidéo https://youtu.be/_XlgCeLcN1k

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.
Le coût de fabrication C (en milliers d'euros) de x milliers de clés produites s'exprime par : $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$.

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction C.
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.
2) Démontrer ces résultats.
3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l'exercice.

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle [7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour $x = 7$.



2) $C(x) = 0{,}05x^3 - 1{,}05x^2 + 8x + 4$
Donc : $C'(x) = 0{,}15x^2 - 2{,}1x + 8$
Et : $C''(x) = 0{,}3x - 2{,}1$

Or, $0{,}3x - 2{,}1 = 0$ pour $x = 7$.
On peut ainsi résumer les variations de C' et la convexité de C dans le tableau suivant :

x	0		7		10
$C''(x)$		−	0	+	
$C'(x)$		↘		↗	
Convexité de C		concave		convexe	

$C(7) = 25{,}7$
Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication C s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.
Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d'une fonction

Vidéo https://youtu.be/AaxQHIsxZkg

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2$.
a) Étudier la convexité de la fonction f.
b) Déterminer l'équation de la tangente à la fonction f en –1.
c) En déduire que pour tout réel x négatif, on a : $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$.

a) Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f'(x) = 3x^2 - 4x$.
Pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $f''(x) = 6x - 4$ qui s'annule pour $x = \frac{2}{3}$.

Pour tout $x \leq \frac{2}{3}$: $f''(x) \leq 0$.
Pour tout $x \geq \frac{2}{3}$: $f''(x) \geq 0$.

Donc f est concave sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ et f est convexe sur $\left[\frac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

b) L'équation de la tangente à la courbe de la fonction f en –1 est de la forme :

$$y = f'(-1)\big(x-(-1)\big) + f(-1)$$

Or, $f'(-1) = 3 \times (-1)^2 - 4 \times (-1) = 7$ et $f(-1) = (-1)^3 - 2 \times (-1)^2 = -3$

Donc, l'équation de la tangente en –1 est : $y = 7(x+1) - 3$
Soit : $y = 7x + 4$

c) f est concave sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ donc sur cet intervalle, la courbe représentative de f est située en dessous de ses tangentes.
Soit, en particulier, la courbe de f est située en dessous de la tangente en –1.
On a ainsi, $f(x) \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$.
Soit $x^3 - 2x^2 \leq 7x + 4$ sur $\left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$ et donc en particulier pour tout x négatif.