LIMITES, CONTINUITÉ, CONVEXITÉ

I. Limite d'une fonction à l'infini

1) Limite finie à l'infini

Intuitivement :

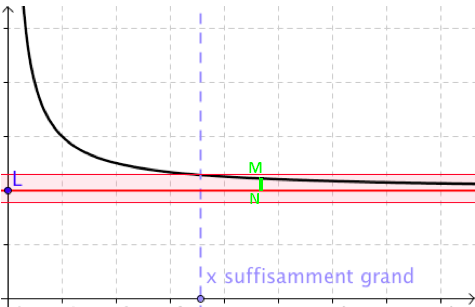
On dit que la fonction admet pour limite en si est aussi proche de que l’on veut pourvu que soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par a pour limite 2 lorsque *x* tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction se resserrent autour de 2 dès que *x* est suffisamment grand. La distance MN tend vers 0.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 2, toutes les valeurs de la fonction appartiennent à cet intervalle dès que *x* est suffisamment grand.



Définition :

On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle ouvert contenant contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on note : .

Définitions : - La droite d'équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction *f* en si .

- La droite d'équation est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de la fonction *f* en si .

Remarque :

Lorsque *x* tend vers , la courbe de la fonction "se rapproche" de son asymptote. La distance MN tend vers 0.

2) Limite infinie à l'infini

Intuitivement :

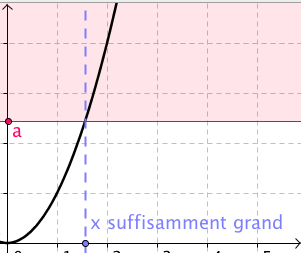
On dit que la fonction admet pour limite en si est aussi grand que l’on veut pourvu que soit suffisamment grand.

Exemple :

La fonction définie par a pour limite lorsque tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que est suffisamment grand.

Si on prend un réel quelconque, l'intervalle contient toutes les valeurs de la fonction dès que est suffisamment grand.



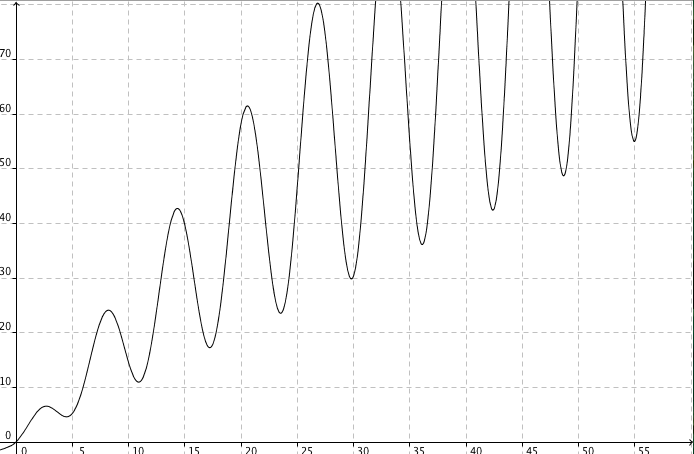
Définitions : - On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on note :

- On dit que la fonction admet pour limite en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand et on

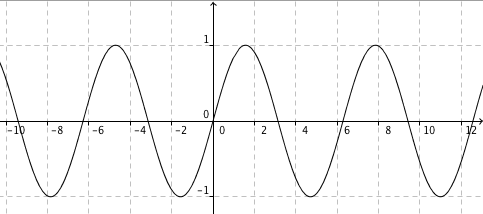
note :

Remarques :

- Une fonction qui tend vers lorsque *x* tend vers n'est pas nécessairement croissante.



- Il existe des fonctions qui ne possèdent pas de limite infinie. C'est le cas des fonctions sinusoïdales.



3) Limites des fonctions usuelles

Propriétés :

- ,

- ,

- , (pour *n* pair)

- , (pour *n* impair)

-

- ,

- ,

II. Limite d'une fonction en un réel *A*

Intuitivement :

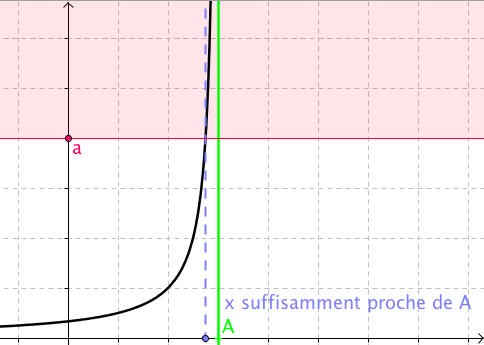
On dit que la fonction admet pour limite en si est aussi grand que l’on veut pourvu que soit suffisamment proche de .

Exemple :

La fonction représentée ci-dessous a pour limite lorsque tend vers .

En effet, les valeurs de la fonction deviennent aussi grandes que l'on souhaite dès que *x* est suffisamment proche de .

Si on prend un réel quelconque, l'intervalle contient toutes les valeurs de la fonction dès que est suffisamment proche de .



Définitions : - On dit que la fonction admet pour limite **** en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de et on note : .

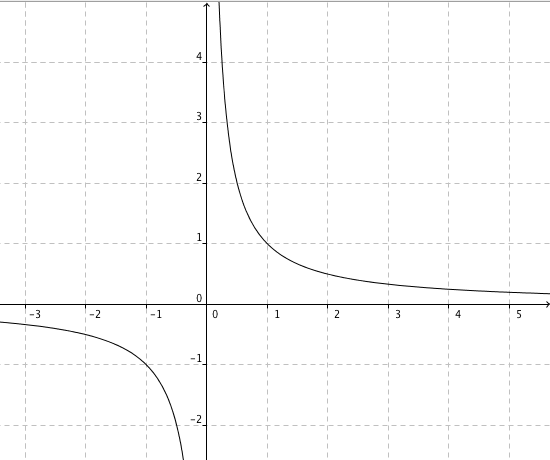
- On dit que la fonction admet pour limite **** en si tout intervalle , réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment proche de et on

note :

Définition : La droite d'équation est **asymptote verticale** à la courbe représentative de la fonction , si : ou .

Remarque :

Certaines fonctions admettent des limites différentes en un réel selon ou

**.

Considérons la fonction inverse définie sur par .

- Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

ou .

- Si  : Lorsque tend vers 0, tend vers et on note :

ou .

On parle de **limite à gauche de 0** et de **limite à droite de 0**.

**Déterminer graphiquement des limites d'une fonction :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9nEJCL3s2eU**](https://youtu.be/9nEJCL3s2eU)

III. Opérations sur les limites

 **Vidéo** [**https://youtu.be/at6pFx-Umfs**](https://youtu.be/at6pFx-Umfs)

peut désigner , ou un nombre réel.

1. Limite d'une somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* | *L* |  |  |  |
|  | *L'* |  |  |  |  |  |
|  | *L + L'* |  |  |  |  | F.I.\* |

\* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

1. Limite d'un produit

désigne ou

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* |  | 0 |
|  | *L'* |  |  |  |
|  | *L L'* |  |  | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou .

Exemple :

et

D'après la règle sur la limite d'un produit :

1. Limite d'un quotient

désigne ou

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* 0 | *L* |  |  | 0 |
|  | *L'* 0 | 0 |  | *L* |  | 0 |
|  |  |  | 0 |  | F.I. | F.I. |

On applique la règle des signes pour déterminer si le produit est ou .

Exemple :  ?

et

D'après la règle sur la limite d'un quotient : et

Remarque :

Comme pour les suites, on rappelle que les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

, "", et .

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions polynômes et rationnelles

 **Vidéo** [**https://youtu.be/4NQbGdXThrk**](https://youtu.be/4NQbGdXThrk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8tAVa4itblc**](https://youtu.be/8tAVa4itblc)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pmWPfsQaRWI**](https://youtu.be/pmWPfsQaRWI)

Calculer : 1) 2) 3)

1) • et

On reconnait une forme indéterminée du type

• Levons l'indétermination (méthode de la factorisation par le monôme de plus haut degré) :

• Or : .

Donc, par limite d’une somme :

De plus, , donc, par limite d’un produit :

Soit : .

2) • En appliquant la méthode de la question 1) pour le numérateur et le dénominateur de la fonction rationnelle, cela nous conduit à une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination :

• Or : .

Donc, par limite d’une somme :

Donc, par limite d’un quotient :

Soit : .

3) • Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination :

• Or :

Donc, par limite d’une somme :

Donc, par limite d’un quotient :

De plus, , donc, par limite d’un produit :

Soit : .

Méthode : Lever une forme indéterminée sur les fonctions avec des radicaux

 **Vidéo** [**https://youtu.be/n3XapvUfXJQ**](https://youtu.be/n3XapvUfXJQ)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU**](https://youtu.be/y7Sbqkb9RoU)

Calculer : 1) 2)

1) • et

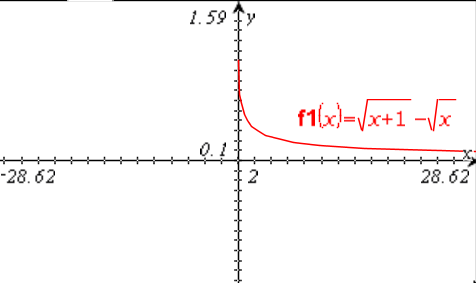
Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

• Par limite d’une somme : .

Et donc, par limite d’un quotient : .

Soit .

On peut vérifier la pertinence du résultat en traçant la courbe représentative de la fonction définie par .

2) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l'indétermination à l'aide de l'expression conjuguée :

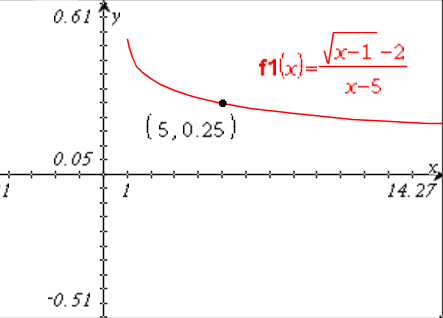
• Or

Donc, par limite d’un quotient, on a : .

Soit : .

En traçant à l'aide de la calculatrice la fonction définie par , il est possible de vérifier la pertinence de la solution trouvée en plaçant le point de coordonnées (5 ; 0,25).

Attention cependant, la calculatrice ne fait pas nécessairement apparaître que la fonction n'est pas définie en 5.



Méthode : Déterminer une asymptote

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0LDGK-QkL80**](https://youtu.be/0LDGK-QkL80)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pXDhrx-nMto**](https://youtu.be/pXDhrx-nMto)

Soit la fonction définie sur par .

Démontrer que la courbe représentative de la fonction admet des asymptotes dont on précisera les équations.

- donc par limite d’un quotient, on a : .

On prouve de même que : .

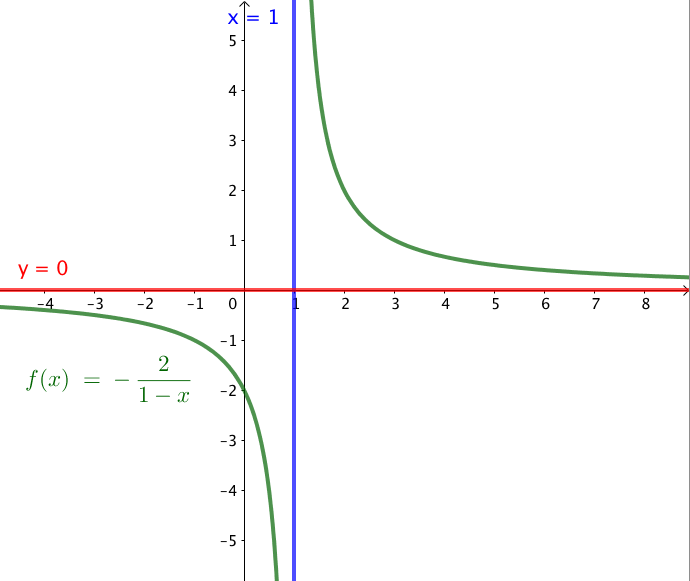
On en déduit que la droite d'équation est asymptote horizontale à la courbe représentative de en et en .

- et

D'après la règle sur la limite d'un quotient : et

On en déduit que la droite d'équation est asymptote verticale à la courbe représentative de à gauche de 1 et à droite de 1.

En traçant, à l'aide de la calculatrice, la courbe de la fonction , il est possible de vérifier les résultats.



IV. Limite d'une fonction composée

Méthode : Déterminer la limite d'une fonction composée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/DNU1M3Ii76k**](https://youtu.be/DNU1M3Ii76k)

Soit la fonction définie sur par :

Calculer la limite de la fonction *f* en .

On a : , donc

Donc, comme limite de fonction composée :

On peut en effet poser et calculer .

V. Limites et comparaisons

1. Théorèmes de comparaisons

Théorème : Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur un intervalle , réel, telles que pour tout , on a .

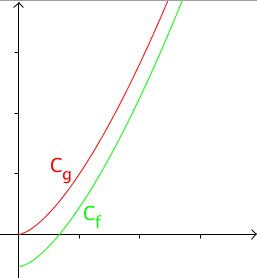
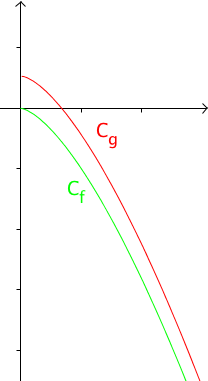
- Si alors (figure 1)

- Si alors (figure 2)

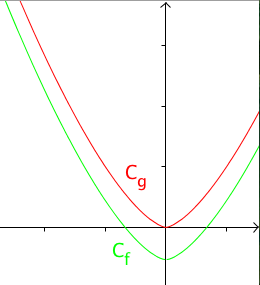
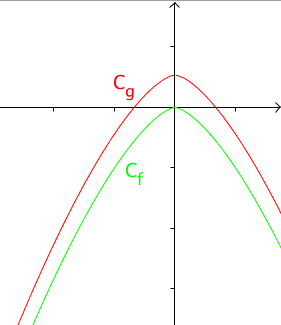
- Si alors (figure 3)

- Si alors (figure 4)

Par abus de langage, on pourrait dire que la fonction *f* pousse la fonction *g* vers pour des valeurs de *x* suffisamment grandes.

*Figure 1 Figure 2*

*Figure 3 Figure 4*

Démonstration dans le cas de la figure 1 :

donc tout intervalle , *m* réel, contient toutes les valeurs de dès que est suffisamment grand, soit : .

Or, dès que est suffisamment grand, on a .

Donc dès que *x* est suffisamment grand, on a : .

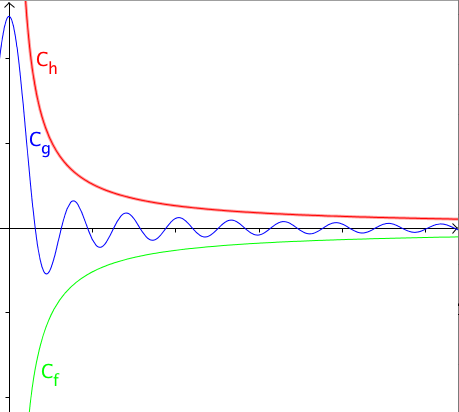
Et donc .

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes : Soit , et trois fonctions définies sur un intervalle , réel, telles que pour tout , on a .

Si et alors .

Remarque : On obtient un théorème analogue en .



Par abus de langage, on pourrait dire que les fonctions et (les gendarmes) se resserrent autour de la fonction pour des valeurs de suffisamment grandes pour la faire tendre vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le théorème du sandwich.

Méthode : Utiliser les théorèmes de comparaison et d'encadrement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y**](https://youtu.be/OAtkpYMdu7Y)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Eo1jvPphja0**](https://youtu.be/Eo1jvPphja0)

Calculer : 1) 2)

1) • n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout , donc : .

• Or donc d'après le théorème de comparaison :

2) • n'existe pas.

Donc sous la forme donnée, la limite cherchée est indéterminée.

Levons l'indétermination :

• Pour tout , donc : , car

Et donc :

Soit :

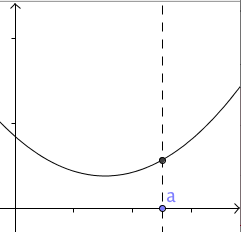
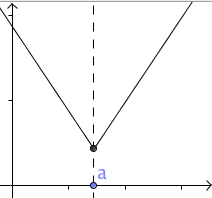
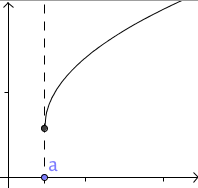
• Or :

D'après le théorème des gendarmes, on a : .

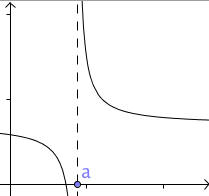
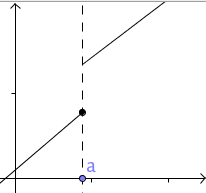
VI. Notion de continuité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XpjKserte6o**](https://youtu.be/XpjKserte6o)

Exemples et contre-exemples :

*f* est continue en a *f* est continue en a *f* est continue en a

*f* n'est pas continue en a *f* n'est pas continue en a

La courbe représentative d'une fonction continue se trace sans lever le crayon.

Définition : Soit une fonction définie sur un intervalle contenant un réel .

*-*  est continue en si : .

*-*  est continue sur si *f* est continue en tout point de .

Exemples :

* Les fonctions , () et plus généralement les fonctions polynômes sont continues sur ℝ.
* Les fonctions et sont continues sur ℝ.
* La fonction est continue sur .
* La fonction est continue sur et elle est continue sur .

Remarque :

Les flèches obliques d’un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l’intervalle considéré.

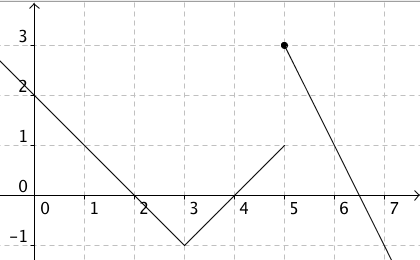
Théorème : Une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle.

Méthode : Étudier la continuité d'une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/03WMLyc7rLE**](https://youtu.be/03WMLyc7rLE)

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par

La fonction *f* est-elle continue sur ℝ ?

Les fonctions , et

sont des fonctions polynômes donc continues sur ℝ.

Ainsi la fonction *f* est continue sur , sur et sur .

Étudions alors la continuité de *f* en 3 et en 5 :

-

Donc :

donc la fonction *f* est continue en 3.

-

La limite de *f* en 5 n'existe pas. On parle de limite à gauche de 5 et de limite à droite de 5.

La fonction *f* n'est donc pas continue en 5.

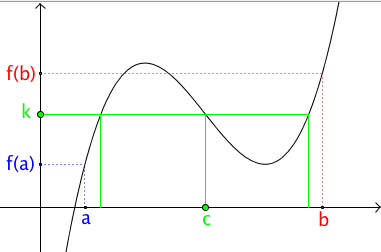
La fonction *f* est continue sur et sur .

VII. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires :

On considère la fonction *f* définie et continue sur un intervalle [*a* ; *b*].

Pour tout réel *k* compris entre et , il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que .



Conséquence :

Dans ces conditions, l'équation admet au moins une solution dans l'intervalle [*a* ; *b*].

Cas particuliers :

- Dans le cas où la fonction *f* est strictement monotone sur l'intervalle [*a* ; *b*] alors le réel *c* est unique.

- Dans le cas où et sont de signes contraires alors il existe au moins un réel *c* compris entre *a* et *b* tel que .

Dans la pratique, pour démontrer que l’équation admet une unique solution sur l'intervalle [*a* ; *b*], on démontre que :

1. *f* est continue sur [*a* ; *b*],

2. *f* change de signe sur [*a* ; *b*],

3. *f* est strictement monotone sur [*a* ; *b*].

Les conditions 1 et 2 nous assurent de l’existence de la solution. La condition 3 apporte en plus son unicité.

Méthode : Résolution approchée d'une équation

**EXEMPLE 1**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y**](https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y)

On considère la fonction *f* définie sur ℝ par .

1) Démontrer que l'équation admet exactement une solution sur l'intervalle .

2) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement au centième de la solution .

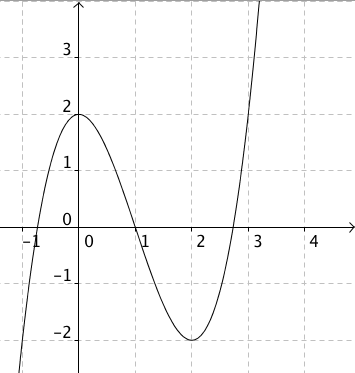
1) • Existence de la solution :

- La fonction *f* est **continue** sur l'intervalle .

-

Donc la fonction *f* **change de signe** sur l'intervalle .

Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l’équation admet au moins une solution.

• Unicité de la solution :

Donc, pour tout *x* de , .

La fonction *f* est donc **strictement croissante** sur l'intervalle .

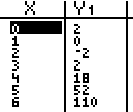
On en déduit que l’équation admet une unique solution sur .

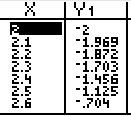
2) A l'aide de la calculatrice, il est possible d'effectuer des balayages successifs en augmentant la précision.

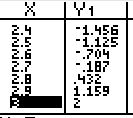
 **Vidéo TI** [**https://youtu.be/MEkh0fxPakk**](https://youtu.be/MEkh0fxPakk)

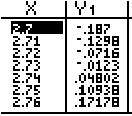
 **Vidéo Casio** [**https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ**](https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ)

 **Vidéo HP** [**https://youtu.be/93mBoNOpEWg**](https://youtu.be/93mBoNOpEWg)

 La solution est comprise entre 2 et 3.

 La solution est supérieure à 2,6

 La solution est comprise entre 2,7 et 2,8

 La solution est comprise entre 2,73 et 2,74.

On en déduit que .

Remarque : Une autre méthode consiste à déterminer un encadrement par dichotomie.

**EXEMPLE 2**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UmGQf7gkvLg**](https://youtu.be/UmGQf7gkvLg)

On considère la fonction *f* définie sur par .

Démontrer que l’équation admet au moins une solution sur [–1 ; 4].

-  *f* est continue sur [–1 ; 4] car une fonction polynôme est continue sur .

-

Donc 2 est compris entre et .

D’après le théorème des valeurs intermédiaires, on en déduit que l’équation admet au moins une solution sur l’intervalle [–1 ; 4].

VIII. Fonction convexe et fonction concave

1) Dérivée seconde

Définition : Soit une fonction dérivable sur un intervalle I dont la dérivée est dérivable sur I.

On appelle **fonction dérivée seconde** de sur I la dérivée de et on note :

.

Exemple :

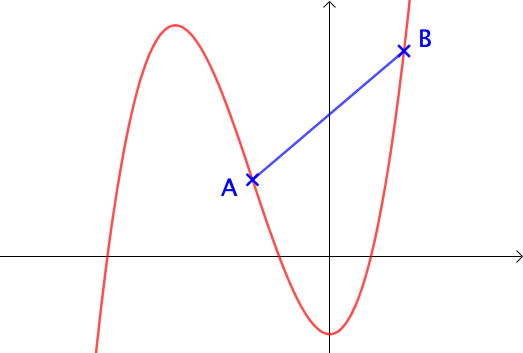
Soit la fonction *f* définie sur par .

Pour tout *x* de, on a : .

Pour tout *x* de , on a : .

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ERML85y\_s6E**](https://youtu.be/ERML85y_s6E)

2) Définitions avec les cordes

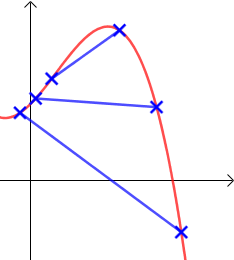
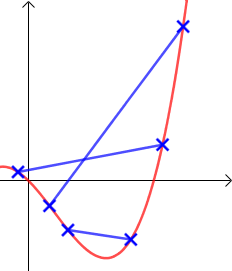
Définition : Une **corde** est un segment reliant deux

points d'une courbe.

Définitions : Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I.

- La fonction *f* est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses cordes.

- La fonction *f* est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses cordes.



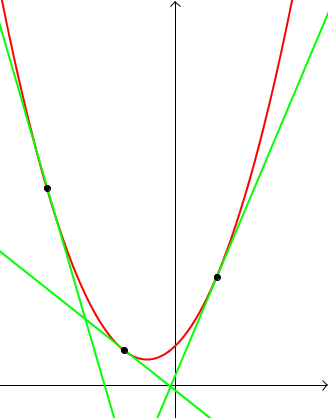
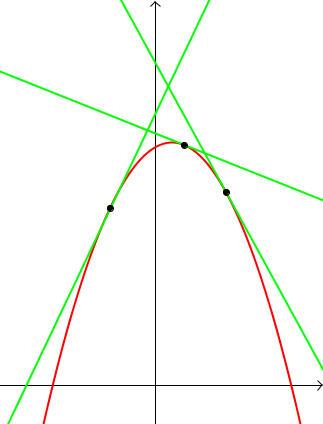
Fonction convexe Fonction concave

3) Définitions avec les tangentes

Définitions : Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle I.

- La fonction *f* est **convexe** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- La fonction *f* est **concave** sur I si, sur l'intervalle I, sa courbe représentative est entièrement située en dessous de chacune de ses tangentes.



Fonction convexe Fonction concave

4) Propriétés

Propriétés :

- La fonction carré est convexe sur .

- La fonction cube est concave sur et convexe sur .

- La fonction inverse est concave sur et convexe sur .

- La fonction racine carrée est concave sur .

Propriété : Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- Dire que la fonction est convexe sur I, revient à dire que sa dérivée est croissante sur I, soit :

, pour tout *x* de I.

- Dire que la fonction est concave sur I, revient à dire que sa dérivée est décroissante sur I, soit :

, pour tout *x* de I.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-OG8l5Batuo**](https://youtu.be/-OG8l5Batuo)

- Démontrons que est convexe, si est croissante :

On considère la fonction *g* dérivable sur I et définie par :

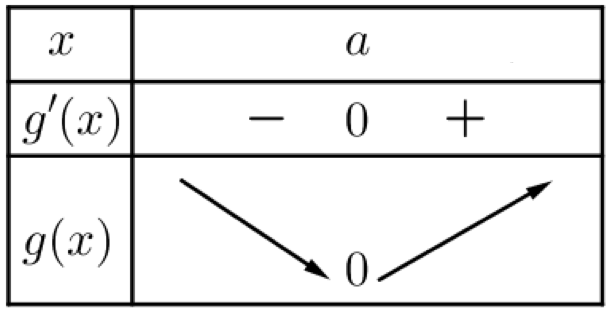
.

Alors : .

Or est croissante sur I, donc est également croissante.

De plus, . Donc est négative pour et positive pour .

On peut donc compléter le tableau de variations de



En effet :

Donc sur I.

Soit

On en déduit que la courbe représentative de est au-dessus de ses tangentes sur I et donc que est convexe sur I.

- Démonstration analogue pour prouver que est concave, si est décroissante.

Méthode : Étudier la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8H2aYKN8NGE**](https://youtu.be/8H2aYKN8NGE)

Soit la fonction définie sur par .

Étudier la convexité de la fonction .

Pour tout de, on a : .

Pour tout de , on a : qui s’annule pour .

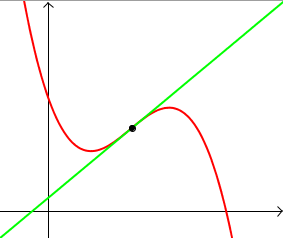
Pour tout , .

Pour tout , .

*D*onc est concave sur et est convexe sur .

IX. Point d'inflexion

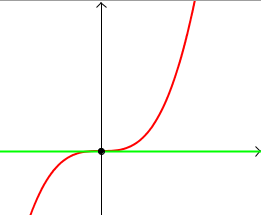
 **Vidéo** [**https://youtu.be/r8sYr6ToeLo**](https://youtu.be/r8sYr6ToeLo)

Définition : Soit une fonction dérivable sur

un intervalle I.

Un **point d'inflexion** est un point où la courbe

traverse sa tangente en ce point.

Remarque importante :

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.

Exemple :

On considère la fonction cube .

La tangente au point O(0,0) est l'axe des abscisses.

Pour , la courbe est en dessous de sa tangente.

Pour , la courbe est au-dessus de sa tangente.

La tangente à la courbe en O traverse donc la courbe.

Le point O est un point d'inflexion de la courbe de la fonction cube.

Méthode : Étudier la convexité pour résoudre un problème

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_XlgCeLcN1k**](https://youtu.be/_XlgCeLcN1k)

Une entreprise fabrique des clés USB avec un maximum de 10 000 par mois.

Le coût de fabrication (en milliers d'euros) de milliers de clés produites s'exprime par : .

1) À l'aide de la calculatrice graphique, conjecturer la convexité de la fonction .

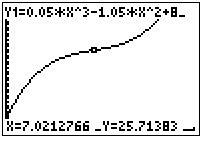
En déduire si la courbe possède un point d'inflexion.

2) Démontrer ces résultats.

3) Interpréter les résultats obtenus au regard du contexte de l’exercice.

1) La fonction semble concave sur l'intervalle [0 ; 7] et convexe sur l'intervalle

[7 ; 10]. La courbe semble posséder un point d'inflexion pour .



2)

Donc :

Et :

Or, pour .

On peut ainsi résumer les variations de et la convexité de dans le tableau suivant :

|  |  |
| --- | --- |
|  | 0 7 10 |
|  | 0 + |
|  |  |
| Convexité de | concave convexe |

Ainsi, le point de coordonnées (7 ; 25,7) est un point d'inflexion de la courbe.

3) Après le point d'inflexion, la fonction est convexe, la croissance du coût de fabrication s'accélère. Avant le point d'inflexion, la fonction est concave, la croissance du coût de fabrication ralentie.

Ainsi, à partir de 7000 clés produites, la croissance du coût de fabrication s'accélère.

Méthode : Prouver une inégalité en utilisant la convexité d’une fonction

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AaxQHlsxZkg**](https://youtu.be/AaxQHlsxZkg)

Soit la fonction définie sur par .

a) Étudier la convexité de la fonction .

b) Déterminer l’équation de la tangente à la fonction en –1.

c) En déduire que pour tout réel négatif, on a : .

a) Pour tout *x* de, on a : .

Pour tout *x* de , on a : qui s’annule pour .

Pour tout  : .

Pour tout  : .

Donc est concave sur et est convexe sur .

b) L’équation de la tangente à la courbe de la fonction en –1 est de la forme :

Or, et

Donc, l’équation de la tangente en –1 est :

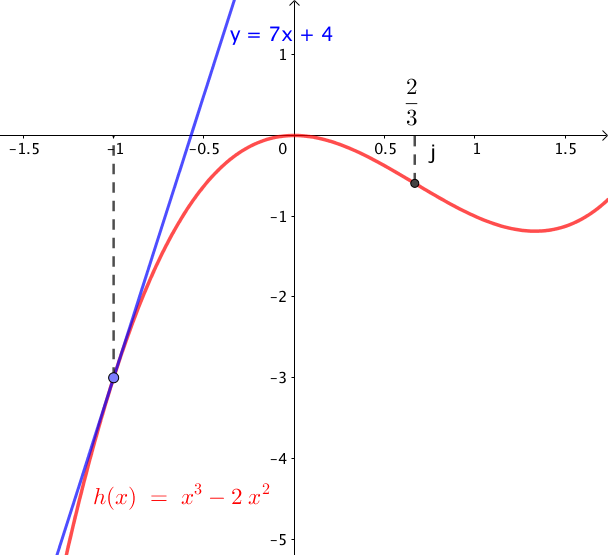
Soit :

c) est concave sur donc sur cet intervalle, la courbe représentative de est située en dessous de ses tangentes.

Soit, en particulier, la courbe de est située en dessous de la tangente en –1.

On a ainsi, sur

Soit sur et donc en particulier pour tout *x* négatif.





Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)