ÉQUATIONS, INÉQUATIONS

I. Notion d'équation

1) Vocabulaire

INCONNUE :
C'est une lettre qui désigne un nombre qu'on ne connaît pas.
Exemple : x

EGALITE OU EQUATION :
C'est une « opération à trous » dont les « trous » sont remplacés par des inconnues.
Exemple : $11x - 7 = 6$

MEMBRE :
Une équation est composée de deux membres séparés par un signe « = ».
Exemple : $11x - 7 = 6$

1er membre *2e membre*

RESOUDRE UNE EQUATION : C'est chercher et trouver le nombre inconnu.

SOLUTION : C'est la valeur de l'inconnue

2) Tester une égalité

Méthode : Tester une égalité

Vidéo https://youtu.be/xZCXVgGT_Bk
Vidéo https://youtu.be/pAJ6CBoCMGE

1) L'égalité $3x - 4 = 5 + 2x$ est-elle vraie dans les cas suivants :
a) $x = 0$
b) $x = 9$

2) A l'été, M. Bèhè, le berger, possédait 3 fois plus de moutons qu'au printemps. Lorsque arrive l'automne, il hérite de 13 nouveaux moutons. Il sera alors en possession d'un troupeau de 193 moutons.
On note x le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.
a) Exprimer en fonction de x le nombre de moutons du troupeau à l'automne.
b) Écrire une égalité exprimant de deux façons différentes le nombre de moutons à l'automne.
c) Tester l'égalité pour différentes valeurs de x dans le but de trouver le nombre de moutons que M. Bèhè possédait au printemps.

1) a) <u>Pour x = 0 :</u>
1^er membre : 3 x 0 – 4 = –4
2^e membre : 5 + 2 x 0 = 5
Les deux membres n'ont pas la même valeur, l'égalité est fausse pour x = 0.

b) <u>Pour x = 9 :</u>
1^er membre : 3 x 9 – 4 = 23
2^e membre : 5 + 2 x 9 = 23
Les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie pour x = 9.

2) a) $3x$ + 13
b) $3x$ + 13 = 193

3) Après de multiples (!) essais, on trouve pour x = 60 :
1^er membre : 3 x 60 + 13 = 193
2^e membre : 193
Les deux membres ont la même valeur, l'égalité est vraie pour x = 60.
Au printemps, M. Bèhè possédait 60 moutons.

Méthode : Vérifier si un nombre est solution d'une équation

Vidéo **https://youtu.be/PLuSPM6rJKI**

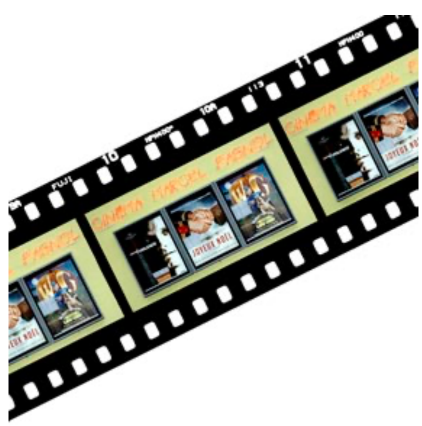
Vérifier si 14 est solution de l'équation : $4(x-2)=3x+6$

On remplace x par 14 dans les deux membres de l'égalité :
• $4(x-2)=4\ (14-2)=48$
• $3x+6=3 \times 14+6=48$
On a donc $4(x-2)=3x+6$ pour $x=14$.
14 vérifie l'équation, donc 14 est solution.

II. Résoudre un problème

Méthode : Mettre un problème en équation

Vidéo **https://youtu.be/q3ijSWk1iF8**



Une carte d'abonnement pour le cinéma coûte 10 €.
Avec cette carte, le prix d'une entrée est de 4 €.
1) Calculer le prix à payer pour 2, 3, puis 10 entrées.
2) Soit x le nombre d'entrées.
Exprimer en fonction de x le prix à payer :
a) sans compter l'abonnement,
b) en comptant l'abonnement.

3) Avec la carte d'abonnement, un client du cinéma a payé 42 € en tout. Combien d'entrées a-t-il achetées ?

1) Pour 2 entrées : 10 + 2 x 4 = 18 €
Pour 3 entrées : 10 + 3 x 4 = 22 €
Pour 10 entrées : 10 + 10 x 4 = 50 €

2) a) $4x$ b) $4x + 10$

3) $4x + 10 = 42$
En prenant $x = 8$, on a : 4 x 8 + 10 = 42
Le client a acheté 8 entrées.

III. Résolution d'équations

1) Introduction

Soit l'équation : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

But : Trouver x !
C'est-à-dire : isoler x dans l'équation pour arriver à :
x = nombre

Les différents éléments d'une équation sont liés ensemble par des opérations.
Nous les désignerons « liens faibles » (+ et −) et « liens forts » (× et :). Ces derniers marquent en effet une priorité opératoire. Pour signifier que le lien est fort, le symbole « × » peut être omis.
Dans l'équation ci-dessus, par exemple, $2x$ et $5x$ sont juxtaposés par le lien faible « + ». Par contre, 2 et x sont juxtaposés par un lien fort « × » qui est omis.

Dans l'équation $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$, on reconnaît des membres de la famille des x et des membres de la famille des nombres juxtaposés par des « liens faibles ».

Pour obtenir « x = nombre », on considère que la famille des x habite à gauche de la « barrière = » et la famille des nombres habite à droite.
Résoudre une équation, c'est clore deux petites fêtes où se sont réunis des x et des nombres. Une se passe chez les x et l'autre chez les nombres. Les fêtes sont finies, chacun rentre chez soi.
On sera ainsi menés à effectuer des mouvements d'un côté à l'autre de la « barrière = » en suivant des règles différentes suivant que le lien est fort ou faible.

2) Avec « lien faible »

*Le savant perse Abu Djafar Muhammad ibn Musa **al Khwarizmi** (Bagdad, 780-850) est à l'origine des méthodes appelées « al jabr » (=le reboutement ; le mot est devenu "algèbre" aujourd'hui) et « al muqabala » (=la réduction).*

Elles consistent en :
*- **al jabr :***
Dans l'équation, un terme négatif est accepté mais al Khwarizmi *s'attache à s'en débarrasser au plus vite. Pour cela, il ajoute son opposé des deux côtés de l'équation.*
Par exemple : $4x - 3 = 5$ *devient* $4x - 3 + 3 = 5 + 3$ *soit* $4x = 5 + 3$.
*- **al muqabala :***
Les termes positifs semblables sont réduits.
Par exemple : $4x = 9 + 3x$ *devient* $x = 9$. *On soustrait* $3x$ *de chaque côté de l'égalité.*

Méthode : Résoudre une équation (1)

Vidéo **https://youtu.be/uV_EmbYu9_E**

Résoudre : $2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$

1ere étape : *chacun rentre chez soi !*

$2x + 5x - 4 = 3x + 2 + 3x$
$2x + 5x - 3x - 3x = +2 + 4$

2^e^ étape : *réduction (des familles)*

$x = 6$

Pour un lien faible, chaque déplacement par-dessus « la barrière = » se traduit par un changement de signe de l'élément déplacé.

3) Avec « lien fort »

La méthode qui s'appelait « al hatt » consistait à diviser les deux membres de l'équation par un même nombre.

Méthode : Résoudre une équation (2)

Vidéo **https://youtu.be/mK8Y-v-K0cM**
Vidéo **https://youtu.be/BOq2Lk9Uyw8**

Résoudre les équations suivantes :

1) $2x = 6$ 2) $-3x = 4$ 3) $\frac{x}{-3} = 4$ 4) $\frac{7}{9}x = -2$

1) $2x = 6$
$\frac{2}{2}x = \frac{6}{2}$ On divise chaque membre par 2 afin de se débarrasser du « 2 » au membre de gauche.
$x = 3$

2) $-3x = 4$

$\frac{-3}{-3}x = \frac{4}{-3}$ On divise chaque membre par -3.

$x = -\frac{4}{3}$

3) $\frac{x}{-3} = 4$

$\frac{x}{-3} \times (-3) = 4 \times (-3)$ On multiplie chaque membre par -3.

$x = 4 \times (-3)$

$x = -12$

4) $\frac{7}{9}x = -2$

$\frac{9}{7} \times \frac{7}{9}x = -2 \times \frac{9}{7}$ On multiplie chaque membre par $\frac{9}{7}$.

$x = -2 \times \frac{9}{7}$

$x = -\frac{18}{7}$

4) Avec les deux

Méthode : Résoudre une équation (3)

Vidéo https://youtu.be/QURskM271bE

Résoudre : $4x + 5 - 3x - 4 = 3x + 2 + x$

$$4x + 5 - 3x - 4 = 3x + 2 + x$$
$$4x - 3x - x - 3x = 2 + 4 - 5 \quad \leftarrow \text{1.}$$
$$-3x = 1 \quad \leftarrow \text{2.}$$
$$x = \frac{1}{-3} \quad \leftarrow \text{3.}$$
$$x = -\frac{1}{3}$$

Étapes successives :

1. Chacun rentre chez soi : liens faibles
2. Réduction
3. Casser le dernier lien fort

Comment en est-on arrivé là ?

	Aujourd'hui	$4x^2 + 3x - 10 = 0$
René Descartes	*Vers 1640*	*4xx + 3x ∝ 10*
François Viète	*Vers 1600*	***4 in A quad + 3 in A aequatur 10***
Simon Stevin	*Fin XVIe*	**4② + 3① *egales* 10⓪**
Tartaglia	*Début XVIe*	***4q p 3R equale 10N***
Nicolas Chuquet	*Fin XVe*	***4^2 p 3^1 egault 10^0***
Luca Pacioli	*Fin XVe*	***Quattro qdrat che gioto agli tre n^0 facia 10*** **(traduit par 4 carrés joints à 3 nombres font 10)**
Diophante	*IIIe*	*$\Delta^Y\delta\ \ \zeta\gamma\ \ \varepsilon\sigma\tau\iota\ \ \iota$* **(traduit par inconnue carré 4 et inconnue 3 est 10)**
Babyloniens et Égyptiens	*IIe millénaire avant J.C.*	***Problèmes se ramenant à ce genre d'équation.***

5) En supprimant des parenthèses

Méthode : Résoudre une équation contenant des expressions entre parenthèses

Vidéo https://youtu.be/quzC5C3a9jM

Résoudre : $3(x+4) = -(x+5) + 2$

$$3(x+4) = -(x+5) + 2$$
$$3x + 12 = -x - 5 + 2 \qquad \text{On applique la distributivité}$$
$$3x + x = -12 - 5 + 2$$
$$4x = -15$$
$$x = \frac{-15}{4}$$

IV. Équations particulières

1) L'équation produit

Définition : Toute équation du type $P(x)$ x $Q(x) = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques, est appelée **équation-produit**.

Remarque :
Nous rencontrerons plus particulièrement des équations-produits de la forme :
$(ax + b)(cx + d) = 0$.

Si $a \times b = 0$, que peut-on dire de a et b ?
« Faire des essais sur des exemples, puis conclure … ! »

Propriété : Si $a \times b = 0$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.
Si un produit de facteurs est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Méthode : Résoudre une équation-produit

Vidéo https://youtu.be/APj1WPPNUgo
Vidéo https://youtu.be/VNGFmMt1W3Y
Vidéo https://youtu.be/EFgwA5f6-40
Vidéo https://youtu.be/sMvrUMUES3s

Résoudre les équations :

a) $(4x + 6)(3 - 7x) = 0$ b) $4x^2 + x = 0$ c) $x^2 - 25 = 0$ d) $x^2 - 3 = 0$
e) $(3x + 1)(1 - 6x) - (3x + 7)(3x + 1) = 0$

a) Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $4x + 6 = 0$ ou $3 - 7x = 0$

$4x = -6$ $\quad$ $-7x = -3$

$x = -\frac{6}{4}$ $\quad$ $x = \frac{-3}{-7}$

$x = -\frac{3}{2}$ $\quad$ $x = \frac{3}{7}$ $\quad$ $S = \left\{-\frac{3}{2} ; \frac{3}{7}\right\}$

b) $4x^2 + x = 0$

$x(4x + 1) = 0$

Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $x = 0$ ou $4x + 1 = 0$

$4x = -1$

$x = -\frac{1}{4}$

$S = \left\{-\frac{1}{4} ; 0\right\}$

c) $x^2 - 25 = 0$

$(x - 5)(x + 5) = 0$

Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $x - 5 = 0$ ou $x + 5 = 0$

$x = 5$ $\quad$ $x = -5$

$S = \{-5 ; 5\}$

d) $x^2 - 3 = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

Si un produit de facteur est nul, alors l'un au moins des facteurs est nul.

Alors : $x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$

$x = \sqrt{3}$ $\quad$ $x = -\sqrt{3}$

$S = \{-\sqrt{3} ; \sqrt{3}\}$

e) On commence par factoriser l'expression pour se ramener à une équation-produit :
$(3x+1)(1-6x)-(3x+7)(3x+1)=0$
$(3x+1)[(1-6x)-(3x+7)]=0$
$(3x+1)(1-6x-3x-7)=0$
$(3x+1)(-9x-6)=0$

Soit :	$3x+1=0$	ou	$-9x-6=0$
	$3x=-1$	ou	$-9x=6$
	$x=-\frac{1}{3}$	ou	$x=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

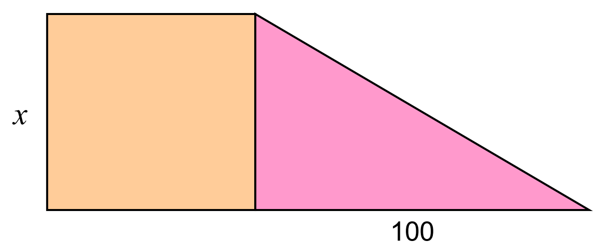
Les solutions sont donc $-\frac{2}{3}$ et $-\frac{1}{3}$.

Méthode : Mettre un problème en équation

Vidéo https://youtu.be/fIObKE_CyHw

Deux agriculteurs possèdent des champs ayant un côté commun de longueur inconnue. L'un est de forme carrée, l'autre à la forme d'un triangle rectangle de base 100m.
Sachant que les deux champs sont de surface égale, calculer leurs dimensions.

On désigne par x la longueur du côté commun.
Les données sont représentées sur la figure suivante :



L'aire du champ carré est égale à x^2.
L'aire du champ triangulaire est égale à $\frac{100x}{2}=50x$
Les deux champs étant de surface égale, le problème peut se ramener à résoudre l'équation : $x^2=50x$

Soit $x^2-50x=0$
$x(x-50)=0$
Si un produit de facteurs est nul alors l'un au moins des facteurs est nul.
Alors $x=0$ ou $x-50=0$
$x=0$ ou $x=50$
La première solution ne convient pas à la situation du problème, on en déduit que le premier champ est un carré de côté de longueur 50 m et le deuxième est un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesure 100 m et 50 m.

2) L'équation-quotient

Définition : Toute équation du type $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$, où $P(x)$ et $Q(x)$ sont des expressions algébriques (avec $Q(x) \neq 0$), est appelée **équation-quotient**.

Propriété : Pour tout x qui n'annule pas l'expression $Q(x)$, l'équation-quotient $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ équivaut à $P(x) = 0$.

Exemple :
L'équation « $\frac{x+2}{x+3}$ = 0 » a pour solution x = –2.

Méthode : Résoudre une équation en se ramenant à une équation-quotient

Vidéo https://youtu.be/zhY1HD4oLHg
Vidéo https://youtu.be/OtGN4HHwEek

Résoudre dans ℝ les équations :

a) $\frac{3x+5}{x-1}$ = 0 b) $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}$ = 0 c) $\frac{x^2-9}{x+3}$ = 0 d) $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$

a) L'équation n'est pas définie pour x = 1.
Pour $x \neq 1$, l'équation $\frac{3x+5}{x-1}$ = 0 équivaut à : $3x + 5 = 0$.
D'où $x = -\frac{5}{3}$.

b) L'équation n'est pas définie pour x = 4.
Pour $x \neq 4$, l'équation $\frac{(2x+1)(x-3)}{x-4}$ = 0 équivaut à : $(2x + 1)(x - 3) = 0$.
Soit : $2x + 1 = 0$ ou $x - 3 = 0$.
Les solutions sont : $x = -\frac{1}{2}$ et $x = 3$.

c) L'équation n'est pas définie pour x = –3.
Pour $x \neq -3$, l'équation $\frac{x^2-9}{x+3}$ = 0 équivaut à : $x^2 - 9 = 0$, soit $x^2 = 9$
Soit encore : x = 3 ou x = –3.
Comme $x \neq -3$, l'équation a pour unique solution : x = 3.

d) L'équation n'est pas définie pour x = 2 et x = 3.
Pour $x \neq 2$ et $x \neq 3$, l'équation $1 - \frac{x+3}{x-3} = \frac{2}{2-x}$ équivaut à : $1 - \frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{2-x} = 0$

On réduit au même dénominateur dans le but de se ramener à une équation-quotient :

$\frac{(x-3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{(x+3)(2-x)}{(x-3)(2-x)} - \frac{2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$

$\frac{(x-3)(2-x)-(x+3)(2-x)-2(x-3)}{(x-3)(2-x)} = 0$

On développe et on réduit le numérateur :

$\frac{2x-x^2-6+3x-2x+x^2-6+3x-2x+6}{(x-3)(2-x)} = 0$

$\frac{4x-6}{(x-3)(2-x)} = 0$

Ce qui équivaut à $4x - 6 = 0$ et $(x-3)(2-x) \neq 0$

D'où $x = \frac{3}{2}$.

V. Résolution d'inéquations

Une inéquation est une inégalité qui contient une inconnue x.

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les valeurs de x qui vérifient cette inégalité. Il s'agit d'un ensemble de valeurs.

Méthode : Résoudre une inéquation du premier degré

Vidéo https://youtu.be/ycYfb8aHssY

Résoudre les inéquations suivantes et représenter les solutions sur une droite graduée :

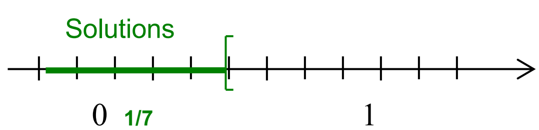
1) $2x + 3 < 4 - 5x$ 2) $2(x-4) \leq 4x - 5$

1) $2x + 3 < 4 - 5x$

$2x + 5x < 4 - 3$

$7x < 1$

$x < \frac{1}{7}$



Les solutions sont tous les nombres strictement inférieurs à $\frac{1}{7}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left]-\infty \,;\, \frac{1}{7}\right[$.

2) $2(x-4) \leq 4x - 5$

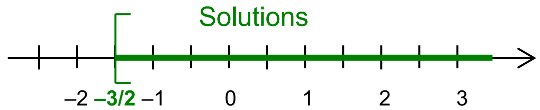
$2x - 8 \leq 4x - 5$

$2x - 4x \leq 8 - 5$

$-2x \leq 3$

$x \geq -\frac{3}{2}$ On divise par un nombre négatif donc on change le sens de l'inégalité.

Les solutions sont tous les nombres supérieurs à $-\frac{3}{2}$.



L'ensemble des solutions de l'inéquation est donc l'intervalle : $\left[-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

VI. Inéquations particulières

1) Tableaux de signes

a) Compléter le tableau de valeurs de l'expression $2x - 10$:

x	–10	–5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$								

b) Compléter alors la 2e ligne du tableau de signes de l'expression $2x - 10$:

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		…	0	…	

c) Pour quelle valeur x, l'expression $2x - 10$ s'annule-t-elle ?
Compléter alors la 1ère ligne du tableau de signes.

d) Vérifier à l'aide d'une calculatrice graphique.

a)

x	–10	–5	0	1	6	7	10	100
$2x - 10$	–30	–20	–10	–8	2	4	10	190

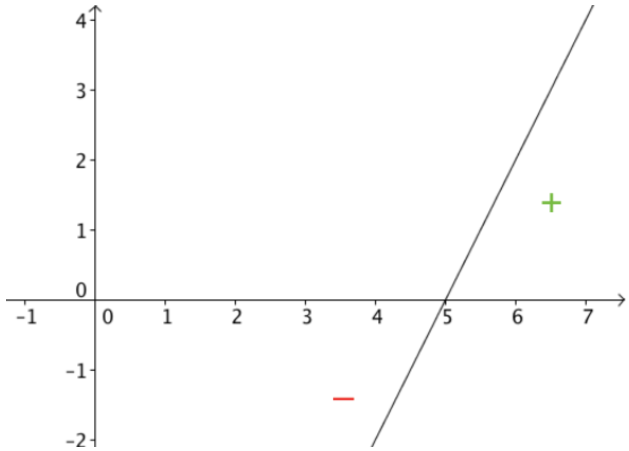
b)

x	$-\infty$		?		$+\infty$
$2x - 10$		–	0	+	

c) $2x - 10 = 0$ soit $2x = 10$ soit encore $x = 5$.

x	$-\infty$		5		$+\infty$
$2x - 10$		–	0	+	

d) On trace la représentation graphique de $f(x) = 2x - 10$.



2) Généralisation

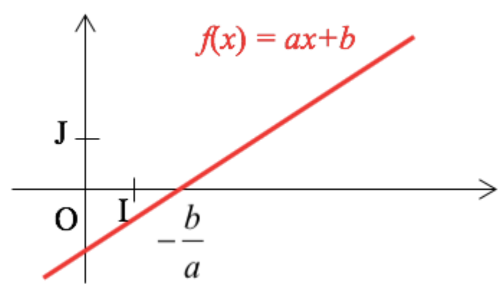
On considère a et b deux nombres fixés ($a \neq 0$) et x est un nombre réel.
Soit la fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$.

Déterminons l'abscisse x du point d'intersection de la droite représentative de f dans un repère avec l'axe des abscisses :

Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 0$,
soit : $ax + b = 0$,
soit : $ax = -b$,
soit encore $x = -\dfrac{b}{a}$.

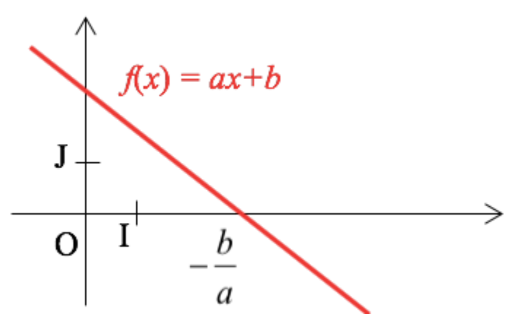
Si a > 0 :
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		–	0	+	



Si a < 0 :
La fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
On obtient le tableau de signes suivant pour $ax+b$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$-\infty$
$ax+b$		+	0	–	



Méthode : Déterminer le signe d'une expression du type $ax + b$

Vidéo https://youtu.be/50CByVTP4ig

1) Déterminer le tableau de signes de l'expression $2x + 6$, où x est un nombre réel.

2) Déterminer le tableau de signes de l'expression $-3x + 12$, où x est un nombre réel.

1) Le coefficient en facteur de « x » est positif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$+2x + 6$		$-$	0	$+$	

$2x + 6 = 0$ pour $x = -3$ ⇑

2) Le coefficient en facteur de « x » est négatif, donc on a le tableau :

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$-3x + 12$		$+$	0	$-$	

$-3x + 12 = 0$ pour $x = 4$ ⇑

3) L'inéquation-produit

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un produit

Vidéo https://youtu.be/qoNLr9NkvUE

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $(3-6x)(x+2) > 0$

Le signe de $(3-6x)(x+2)$ dépend du signe de chaque facteur $3 - 6x$ et $x+2$.

$3 - 6x = 0$ ou $x + 2 = 0$

$6x = 3$ $\quad\quad$ $x = -2$

$x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux facteurs.
En appliquant la règle des signes, on en déduit le signe du produit $(3-6x)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$3 - 6x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(3-6x)(x+2)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que $(3-6x)(x+2) > 0$ pour $x \in \left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(3-6x)(x+2) > 0$ est $\left]-2\,;\frac{1}{2}\right[$.

4) L'inéquation-quotient

Méthode : Résoudre une inéquation en étudiant le signe d'un quotient

Vidéo https://youtu.be/Vitm29q8AEs

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$.

L'équation n'est pas définie pour $3x - 2 = 0$, soit $x = \frac{2}{3}$.
Il faudra éventuellement exclure cette valeur de l'ensemble des solutions.

Le signe de $\frac{2-6x}{3x-2}$ dépend du signe des expressions $2-6x$ et $3x-2$.
$2-6x=0$ équivaut à $x = \frac{1}{3}$.

Résumons dans un même tableau de signes les résultats pour les deux expressions.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$2-6x$		+	0	-		-	
$3x-2$		-		-	0	+	
$\frac{2-6x}{3x-2}$		-	0	+	||	-	

La double-barre dans le tableau signifie que le quotient n'est pas défini pour $x = \frac{2}{3}$.

On en déduit que $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ pour $x \in \left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{2-6x}{3x-2} \leq 0$ est $\left]-\infty\,;\frac{1}{3}\right] \cup \left]\frac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

VII. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si Δ < 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si Δ = 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:

a = 2, b = –1 et c = –6 donc Δ = $b^2 - 4ac$ = $(–1)^2$ – 4 x 2 x (–6) = 49.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$$
$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

a = 2, b = –3 et c = $\frac{9}{8}$ donc Δ = $b^2 - 4ac$ = $(–3)^2$ – 4 x 2 x $\frac{9}{8}$ = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:

a = 1, b = 3 et c = 10 donc Δ = $b^2 - 4ac$ = 3^2 – 4 x 1 x 10 = –31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

VIII. Résolution d'une inéquation du second degré

1) Signe d'un trinôme

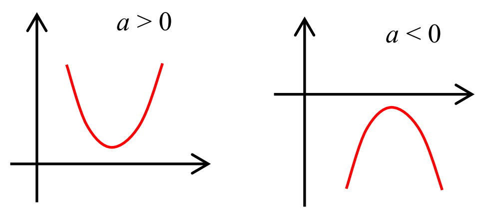
Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY
Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q
Vidéo https://youtu.be/JCVotquzIlA

Remarque préliminaire :
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:
- si a > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 
- si a < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

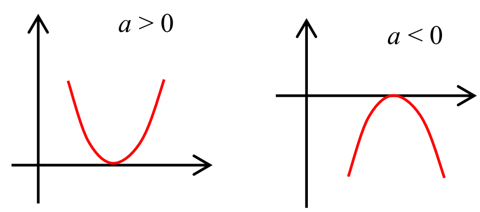
- Si Δ < 0 :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a



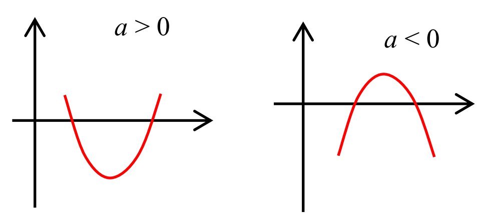
- Si Δ = 0 :

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a



- Si Δ > 0 :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a



Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ équivaut à $x^2 + 4x - 7 < 0$.

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est Δ = 4² – 4 x 1 x (–7) = 44 et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2-\sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2+\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc :
$]-2-\sqrt{11}\ ;\ -2+\sqrt{11}[$.

IX. Équations et inéquations avec exponentiels, logarithmes

1) Avec les exponentiels

Propriétés : Pour tous réels a et b, on a :
a) $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$
b) $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation

Vidéo https://youtu.be/dA73-HT-I_Y
Vidéo https://youtu.be/d28Fb-zBe4Y

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{4x-1} \geq 1$.

a) $e^{x^2-3} - e^{-2x} = 0$
$\Leftrightarrow e^{x^2-3} = e^{-2x}$
$\Leftrightarrow x^2 - 3 = -2x$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$
Donc $x = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$ ou $x = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$
Les solutions sont –3 et 1.

b) $e^{4x-1} \geq 1$
$\Leftrightarrow e^{4x-1} \geq e^0$
$\Leftrightarrow 4x - 1 \geq 0$
$\Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$
L'ensemble des solutions est l'intervalle $\left[\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[$.

2) Avec les logarithmes

Propriétés :
a) $\ln e^x = x$ b) Pour $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

Propriétés : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :
a) $\ln x = \ln y \iff x = y$
b) $\ln x < \ln y \iff x < y$

Méthode : Résoudre une équation ou une inéquation avec des logarithmes

Vidéo https://youtu.be/lCT-8ijhZiE
Vidéo https://youtu.be/GDt785E8TPE
Vidéo https://youtu.be/_fpPphstjYw

Résoudre dans I les équations et inéquations suivantes :

a) $\ln x = 2,\ I =]0\,;\,+\infty[$ b) $e^{x+1} = 5,\ I = \mathbb{R}$

c) $3\ln x - 4 = 8,\ I =]0\,;\,+\infty[$ d) $\ln(6x-1) \geq 2,\ I = \left]\frac{1}{6}\,;\,+\infty\right[$

e) $e^x + 5 > 4\,e^x$, $I = \mathbb{R}$

a) $\ln x = 2$
$\ln x = \ln e^2$
$x = e^2$

b) $e^{x+1} = 5$
$e^{x+1} = e^{\ln 5}$
$x + 1 = \ln 5$
$x = \ln 5 - 1$

c) $3\ln x - 4 = 8$
$3\ln x = 12$
$\ln x = 4$
$\ln x = \ln e^4$
$x = e^4$

d) $\ln(6x-1) \geq 2$
$\ln(6x-1) \geq \ln e^2$
$6x - 1 \geq e^2$
$6x \geq e^2 + 1$
$x \geq \dfrac{e^2+1}{6}$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left[\frac{e^2+1}{6}\,;\,+\infty\right[$.

e) $e^x + 5 > 4\,e^x$
$e^x - 4\,e^x > -5$
$-3\,e^x > -5$
$e^x < \frac{5}{3}$
$e^x < e^{\ln\frac{5}{3}}$
$x < \ln\frac{5}{3}$

L'ensemble solution est donc l'intervalle $\left]-\infty\,;\,\ln\frac{5}{3}\right[$.