ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Notion d'équation différentielle

1) Définition d'une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction.

Exemples :
a) L'équation $f'(x) = 5$ peut se noter $y' = 5$ en considérant que y est une fonction inconnue qui dépend de x.
Dans ce cas, une solution de cette équation est $y = 5x$. En effet, $(5x)' = 5$.

b) Une solution de l'équation $y' = 2x$ est $y = x^2$.
Pour une équation différentielle, la solution n'est habituellement pas unique.
Par exemple, $y = x^2 + 1$ est une autre solution de l'équation différentielle.
En effet, $(x^2 + 1)' = 2x$.

2) Équation différentielle du type $y' = f$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une **solution** de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si, g est dérivable sur I et, pour tout réel x de I, on a : $g'(x) = f(x)$.

Méthode : Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle

Vidéo https://youtu.be/LX8PxR-ScfM

Prouver que la fonction g définie sur $]0\,;+\infty[$ par $g(x) = 3x^2 + \ln x$ est solution de l'équation différentielle $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

Pour tout x de sur $]0\,;+\infty[$, on a :
$g'(x) = 3 \times 2x + \frac{1}{x} = 6x + \frac{1}{x}$
Donc, g est bien solution de l'équation $y' = 6x + \frac{1}{x}$.

II. Équations différentielles du type $y' = ay$

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Démonstration :
• Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$, où C est un réel.
Alors, $f'(x) = C \times ae^{ax} = a \times Ce^{ax} = af(x)$.
Donc $f'(x) = af(x)$.
f est donc solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

• Réciproquement, soit f une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax} \times f(x)$.
g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x) = e^{-ax} \times f'(x) - ae^{-ax} \times f(x)$.
Comme f est solution de l'équation différentielle $y' = ay$, on a : $f'(x) = af(x)$.
Ainsi : $g'(x) = e^{-ax} \times af(x) - ae^{-ax} \times f(x) = 0$.
La fonction g est donc égale à une constante réelle C, soit :
$e^{-ax} \times f(x) = C$.
Et donc : $f(x) = \dfrac{C}{e^{-ax}} = Ce^{ax}$.

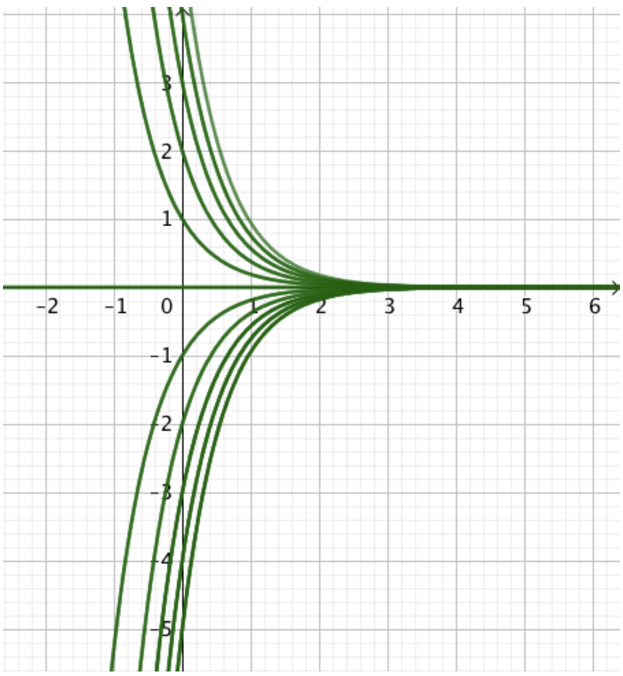
Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay$

Vidéo https://youtu.be/YJNHTq85tJA

On considère l'équation différentielle $3y' + 5y = 0$.
1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
b) Représenter à l'aide de la calculatrice ou d'un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(1) = 2$.

1) a) $3y' + 5y = 0$
$3y' = -5y$
$y' = -\frac{5}{3}y$
Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{-\frac{5}{3}x}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Pour différentes valeurs de C, on obtient :



2) $y(1) = 2$
Donc : $Ce^{-\frac{5}{3}\times 1} = 2$

$Ce^{-\frac{5}{3}} = 2$

$C = 2e^{\frac{5}{3}}$

Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{5}{3}}\, e^{-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}-\frac{5}{3}x} = 2e^{\frac{5}{3}(1-x)}$

Propriété : Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et kf, $k \in \mathbb{R}$, sont également solutions de l'équation différentielle.

Démonstrations :
- $(f + g)' = f' + g' = af + ag = a(f + g)$
- $(kf)' = kf' = k \times af = a(kf)$

III. Équations différentielles du type $y' = ay + b$

Propriété : La fonction $x \longmapsto -\frac{b}{a}$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($a \neq 0$). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :
On pose : $g(x) = -\frac{b}{a}$. Alors $g'(x) = 0$.
Or : $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$.
Donc : $g'(x) = ag(x) + b$.
g est donc solution de l'équation $y' = ay + b$.

Propriété : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (a et b deux réels, a non nul) sont les fonctions de la forme :

$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$

où u est la solution particulière constante de l'équation $y' = ay + b$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Remarque : L'équation $y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$, où $C \in \mathbb{R}$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + b$

Vidéo https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg
Vidéo https://youtu.be/CFZr44vny3w

On considère l'équation différentielle $2y' - y = 3$.

1) Déterminer la forme générale des solutions de l'équation.
2) Déterminer l'unique solution telle que $y(0) = -1$.

1) $2y' - y = 3$
$2y' = y + 3$
$y' = \frac{1}{2}y + \frac{3}{2}$
Les solutions sont de la forme : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soit : $y_C(x) = Ce^{\frac{1}{2}x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$

2) $y(0) = -1$
Donc : $Ce^{\frac{1}{2}\times 0} - 3 = -1$
$C - 3 = -1$
$C = 2$
Et donc : $y(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 3$

IV. Équations différentielles du type $y' = ay + f$

Propriété : Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$ sont les fonctions de la forme :
$$x \longmapsto u(x) + v(x)$$
où u est une solution particulière de l'équation $y' = ay + f$
et v est une solution quelconque de l'équation $y' = ay$.

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type $y' = ay + f$

Vidéo https://youtu.be/QeGvVncvyLc

On considère l'équation différentielle $y' - 2y = x^2$.
1) Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est solution particulière de l'équation différentielle.
2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l'équation différentielle.

1) $u'(x) = -\frac{1}{2} \times 2x - \frac{1}{2} = -x - \frac{1}{2}$
Donc : $u'(x) - 2u(x) = -x - \frac{1}{2} - 2 \times \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$
$= -x - \frac{1}{2} + x^2 + x + \frac{1}{2}$
$= x^2$
La fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$ est donc une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$.

2) Les solutions de l'équation : $y' = 2y$ sont de la forme $x \longmapsto Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

On en déduit que les solutions de l'équations $y' - 2y = x^2$ sont de la forme :
$y_C(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$, **somme** d'une solution particulière de l'équation $y' - 2y = x^2$ et de la forme générale des solutions de l'équation $y' = 2y$.