ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

I. Notion d’équation différentielle

 1) Définition d’une équation différentielle

Définition : Une **équation différentielle** est une équation dont l’inconnue est une fonction.

Exemples :

a) L’équation peut se noter en considérant que est une fonction inconnue qui dépend de .

Dans ce cas, une solution de cette équation est . En effet, .

b) Une solution de l’équation est .

Pour une équation différentielle, la solution n’est habituellement pas unique.

Par exemple, est une autre solution de l’équation différentielle.

En effet, .

 2) Équation différentielle du type

Définition : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I de . On dit que la fonction *g* est une **solution** de l’équation différentielle sur I si et seulement si, *g* est dérivable sur I et, pour tout réel de I, on a : .

Méthode : Vérifier qu’une fonction est solution d’une équation différentielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/LX8PxR-ScfM**](https://youtu.be/LX8PxR-ScfM)

Prouver que la fonction définie sur par est solution de l’équation différentielle .

Pour tout de sur , on a :

Donc, est bien solution de l’équation .

II. Équations différentielles du type

Propriété : Les solutions de l’équation différentielle , , sont les fonctions de la forme , où est une constante réelle quelconque.

Démonstration :

• Soit la fonction définie sur par , où est un réel.
Alors, *.*

Donc .

 est donc solution de l’équation différentielle .

• Réciproquement, soit une solution de l’équation différentielle .

Et soit la fonction définie sur par .
 est dérivable sur et on a : .

Comme est solution de l’équation différentielle , on a : .
Ainsi :

La fonction est donc égale à une constante réelle , soit :

.

Et donc : .

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YJNHTq85tJA**](https://youtu.be/YJNHTq85tJA)

On considère l’équation différentielle .

1) a) Déterminer la forme générale des solutions de l’équation.

 b) Représenter à l’aide de la calculatrice ou d’un logiciel, quelques courbes des fonctions solutions.

2) Déterminer l’unique solution telle que .

1) a)

Les solutions sont de la forme : , .

b) Pour différentes valeurs de , on obtient :



2)

Donc :

Et donc :

Propriété : Si et sont deux solutions de l’équation différentielle , , alors  et sont également solutions de l’équation différentielle.

Démonstrations :

-

-

III. Équations différentielles du type

Propriété : La fonction est solution de l’équation différentielle

 (). Cette solution est appelée **solution particulière constante**.

Démonstration :

On pose : . Alors

Or :

Donc :

 est donc solution de l’équation

Propriété : Les solutions de l’équation différentielle (et deux réels*,* non nul) sont les fonctions de la forme :

où est la solution particulière constante de l’équation

et est une solution quelconque de l’équation .

Remarque : L’équation est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Corollaire : Les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme , où .

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/F\_LQLZ8rUhg**](https://youtu.be/F_LQLZ8rUhg)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CFZr44vny3w**](https://youtu.be/CFZr44vny3w)

On considère l’équation différentielle .

1) Déterminer la forme générale des solutions de l’équation.

2) Déterminer l’unique solution telle que .

1)

Les solutions sont de la forme : , .

Soit : ,

2)

Donc :

Et donc :

IV. Équations différentielles du type

Propriété : Soit un réel non nul et une fonction définie sur un intervalle I.

Les solutions de l’équation différentielle sont les fonctions de la forme :

où est une solution particulière de l’équation

et est une solution quelconque de l’équation .

Méthode : Résoudre une équation différentielle du type

 **Vidéo** [**https://youtu.be/QeGvVncvyLc**](https://youtu.be/QeGvVncvyLc)

On considère l’équation différentielle .

1) Démontrer que la fonction définie sur par est solution particulière de l’équation différentielle.

2) En déduire la forme générale de toutes les solutions de l’équation différentielle.

1)

Donc :

La fonction définie sur par est donc une solution particulière de l’équation .

2) Les solutions de l’équation : sont de la forme , .

On en déduit que les solutions de l’équations sont de la forme :

, , **somme** d’une solution particulière de l’équation et de la forme générale des solutions de l’équation .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)