DÉRIVATION

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction *f* définie sur par .

L'image de 0 par la fonction *f* n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de lorsque *x* se rapproche de 0.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *x* | -0,5 | -0,1 | -0,01 | -0,001 | … | 0,001 | 0,01 | 0,1 | 0,5 |
|  | 1,5 | 1,9 | 1,99 | 1,999 | ? | 2,001 | 2,01 | 2,1 | 2,5 |

On constate que se rapproche de 2 lorsque *x* se rapproche de 0.

On dit que la limite de *f* lorsque *x* tend vers 0 est égale à 2 et on note : .

2) Soit la fonction *g* définie sur par .

A l'aide de la calculatrice, on constate que devient de plus en plus grand lorsque *x* se rapproche de 0.

On dit que la limite de *g* lorsque *x* tend vers 0 est égale à et on note :

 .

Définition : On dit que a pour limite *L* lorsque *x* tend vers 0 si les valeurs de peuvent être aussi proche de *L* que l'on veut pourvu que *x* soit suffisamment proche de 0.

On note : et on lit : La limite de lorsque *x* tend vers 0 est égale à *L*.

II. Nombre dérivé

 1) Rappel : Pente d'une droite

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I. Soit deux réels *a* et *b* appartenant à I tels que *a* < *b*.

Soit A et B deux points de la courbe représentative de *f* d'abscisses respectives *a* et *b.*

La pente (ou le coefficient directeur) de la droite (AB) est égal à : .



2) Fonction dérivable



Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I. Soit un réel *a* appartenant à I.

Soit A et M deux points de la courbe représentative de *f* d'abscisses respectives *a* et *a+h*, avec *h* ≠ 0.

La pente de la droite (AM) est égale à : = .

Lorsque le point M se rapproche du point A, la pente de la droite (AM) est égale à la limite de lorsque *h* tend vers 0.

Cette pente s'appelle le nombre dérivé de *f* en *a* et se note .

Définition : On dit que la fonction *f* est **dérivable** en *a* s'il existe un nombre réel *L*, tel que : = *L*.

*L* est appelé le **nombre dérivé** de *f* en *a* et se note .

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

 **Vidéo** [**https://youtu.be/UmT0Gov6yyE**](https://youtu.be/UmT0Gov6yyE)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Iv5\_mw1EYBE**](https://youtu.be/Iv5_mw1EYBE)

Soit la fonction trinôme *f* définie sur ℝ par .

Démontrer que *f* est dérivable en .

On commence par calculer pour *h* ≠ 0 :

=

=

=

=

Donc : = = 6

On en déduit que *f* est dérivable en . Le nombre dérivé de *f* en 2 vaut 6 et on note : .

III. Tangente à une courbe

Soit une fonction *f* définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel *a* appartenant à I.

 est le nombre dérivé de *f* en *a*.

A est un point d'abscisse *a* appartenant à la courbe représentative de *f*.



Définition : La **tangente** à la courbe au point A est la droite passant par A de pente le nombre dérivé .

Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0jhxK55jONs**](https://youtu.be/0jhxK55jONs)

On considère la fonction trinôme *f* définie sur ℝ par dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.

Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu que le nombre dérivé de *f* en 2 vaut 6.

Ainsi la tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de pente (coefficient directeur) 6.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe en A est :

 .

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo**](https://youtu.be/Jj0ql6-o2Uo)

La tangente a pour pente donc son équation est de la forme : où *b* est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons *b* :

La tangente passe par le point A, donc :

 soit :

On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fKEGoo50Xmo**](https://youtu.be/fKEGoo50Xmo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7-z62dSkkTQ**](https://youtu.be/7-z62dSkkTQ)

On considère la fonction trinôme *f* définie sur ℝ par .

Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu plus haut que la pente de la tangente est égal à 6.

Donc son équation est de la forme : , soit :

Une équation de tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2 est .

IV. Dérivées des fonctions usuelles

 1) Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-nRmE8yFSSg**](https://youtu.be/-nRmE8yFSSg)

Soit la fonction *f* définie sur par . Démontrons que pour tout *x* réel, on : .

Calculons le nombre dérivé de la fonction *f* en un nombre réel quelconque *a*.

Pour : = = = =

Or : = =

Pour tout nombre *a*, on associe le nombre dérivé de la fonction *f* égal à 2*a*.

On a donc défini sur une fonction, notée *f* ' dont l'expression est .

Cette fonction s'appelle la fonction dérivée de *f*.



Le mot « dérivé » vient du latin « derivare » qui signifiait « détourner un cours d’eau ».

Le mot a été introduit par le mathématicien franco-italien *Joseph Louis Lagrange* (1736 ; 1813) pour signifier que cette nouvelle fonction dérive (au sens de "provenir") d'une autre fonction.

Définitions : Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que *f* est **dérivable** sur I si elle est dérivable en tout réel *x* de I.

Dans ce cas, la fonction qui à tout réel *x* de I associe le nombre dérivé de *f* en *x* est appelée **fonction dérivée** de *f* et se note *f* '.

 2) Formules de dérivation des fonctions usuelles :

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Fonction *f* | Ensemble de définition de *f* | Dérivée *f* ' | Ensemble de définition de *f '* |
| ,  |  |  |  |
| ,  |  |  |  |
|   |  |  |  |
|  entier |  |  |  |
|   | \{0} |   | \{0} |
|   entier | \{0} |   | \{0} |
|  |  |   |  |

Exemples :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9Mann4wOGJA**](https://youtu.be/9Mann4wOGJA)

1) Soit la fonction *f* définie sur par alors *f* est dérivable sur et on a pour tout *x* de, .

2) Soit la fonction *f* définie sur \{0} par alors *f* est dérivable sur et sur et on a pour tout *x* de \{0}, .

Démonstration la fonction inverse :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk**](https://youtu.be/rQ1XfMN5pdk)

Soit la fonction *f* définie sur \{0} par . Démontrons que pour tout *x* de \{0}, on a : .

Pour et :

 = = = =

Or : = =

Pour tout nombre *a*, on associe le nombre dérivé de la fonction *f* égal à .

Ainsi, pour tout *x* de \{0}, on a : .

 3) Démonstration :

 Non dérivabilité de la fonction racine carrée en 0

 **Vidéo** [**https://youtu.be/N5wnOoLDrjo**](https://youtu.be/N5wnOoLDrjo)

Soit la fonction *f* définie sur par .

On calcule le taux de variation de *f* en 0 :

Pour  : = = = = =

Or : = = .

En effet, lorsque *h* tend vers 0, prend des valeurs de plus en plus grandes.

Donc *f* n’est pas dérivable en 0.

Géométriquement, cela signifie que la courbe

représentative de la fonction racine carrée admet

une tangente verticale en 0.

V. Opérations sur les fonctions dérivées

* 1) Somme, produit, inverse, quotient de dérivées

Exemple :

Soit la fonction *f* définie sur par .

Pour :

 =

 =

 =

Donc : = = 1+.

Alors *f* est dérivable sur et on a pour tout *x* de, .

On pose pour tout *x* de, et . On a ainsi : *.*

Pour tout *x* de, et .

On constate sur cet exemple que : .

Soit encore :

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

*u* et *v* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

|  |  |
| --- | --- |
|  est dérivable sur I |  |
|  est dérivable sur I, où *k* est une constante |  |
|  est dérivable sur I |  |
|  est dérivable sur I, où *u* ne s'annule pas sur I | =  |
|  est dérivable sur I, où *v* ne s'annule pas sur I | =  |

Démonstration pour le produit :

- On veut démontrer que : =

 =

 =

 =

 = +

En passant à la limite lorsque *h* tend vers 0, on a :

 = et =

Car *u* et *v* sont dérivables sur I.

Et, = .

Soit, =

Ainsi :

Méthode : Calculer les dérivées de sommes, produits et quotients de fonctions

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ehHoLK98Ht0**](https://youtu.be/ehHoLK98Ht0)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1fOGueiO\_zk**](https://youtu.be/1fOGueiO_zk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OMsZNNIIdrw**](https://youtu.be/OMsZNNIIdrw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/jOuC7aq3YkM**](https://youtu.be/jOuC7aq3YkM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-MfEczGz\_6Y**](https://youtu.be/-MfEczGz_6Y)

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

1) 2) 3)

4) 5)

1) avec

 Donc :

2) avec

 =

 Donc : = +

3) avec

 Donc : = =

4) avec

 Donc : = +

5) avec

Donc :

 2) Composée de dérivées

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Ensemble de définition | Dérivée |
|  | *f* dérivable sur I |  |

Exemple :

Alors =

En effet : et

VI. Cas de la fonction valeur absolue

 1) Valeur absolue d’un nombre (rappels)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/O61rmOdXg9I**](https://youtu.be/O61rmOdXg9I)

Exemples :

- La valeur absolue de –5 est égale à 5.

- La valeur absolue de 8 est égale à 8.

Définition : La **valeur absolue** d'un nombre A est égal au nombre A si A est positif, et au nombre –A si A est négatif.

La valeur absolue de A se note .

Exemple :

 2) Fonction valeur absolue

Définition : La **fonction valeur absolue** est la fonction *f* définie sur par .

Propriété : La fonction valeur absolue est strictement décroissante sur l’intervalle et strictement croissante sur l’intervalle .

Éléments de démonstration :

Sur chacun des intervalles et , la fonction *f* est une fonction affine.

Représentation graphique :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  0  |
|  |    0 |



Remarque :

Dans un repère orthogonal, la courbe de la fonction valeur absolue est symétrique par rapport à l’axe des ordonnées.

 3) Étude de la dérivabilité en 0 :

Soit la fonction *f* définie sur par .

On calcule le taux de variation de *f* en 0 :

- Si , = = = = 1

Car , si .

- Si , = = = = –1

Car , si .

Donc : n’existe pas car dépend du signe de *h*.

La fonction valeur absolue n’est donc pas dérivable en 0.

En observant la courbe représentative de la fonction valeur absolue, on comprend bien qu’il n’existe pas de tangente à la courbe en 0.

Cependant, il est à noter que la fonction est dérivable en tout nombre différent de 0.

Méthode : Démontrer qu'une fonction valeur absolue n’est pas dérivable

Soit la fonction *g* définie sur par .

La fonction *g* est-elle dérivable en ?

On commence par calculer pour *h* ≠ 0.

 = =

 

 n'est pas égale à un unique nombre réel.

La fonction *g* n'est pas dérivable en .

VII. Étude des variations d'une fonction

Théorème : Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si , alors *f* est décroissante sur I.

- Si , alors *f* est croissante sur I.

 1) Exemple d’une fonction du second degré

Méthode : Étudier les variations d’une fonction polynôme du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EXTobPZzORo**](https://youtu.be/EXTobPZzORo)

Soit la fonction *f* définie sur par .

1) Calculer la fonction dérivée de *f*.

2) Déterminer le signe de *f* ’ en fonction de *x*.

3) Dresser le tableau de variations de *f*.

1) Pour tout *x* réel, on a : .

2) On commence par résoudre l’équation .

Soit :

Donc et .

La fonction *f* ’ est une fonction affine représentée par une droite dont le coefficient directeur 4 est positif.

Elle est donc d’abord négative (avant ) puis ensuite positive (après ).

3) On dresse alors le tableau de variations en appliquant le théorème :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  2  |
|  | – |  + |
| *f* |    –7 |

En effet : .

La fonction *f* admet un minimum égal à –7 en .

 2) Exemple d’une fonction du troisième degré

Méthode : Dresser le tableau de variations d'une fonction polynôme du 3e degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/23\_Ba3N0fu4**](https://youtu.be/23_Ba3N0fu4)

Soit la fonction *f* définie sur par .

1) Étudier les variations de *f* et dresser le tableau de variation.

2) Dans repère, représenter graphiquement la fonction *f*.

1) Pour tout *x* réel, on a : .

Commençons par résoudre l'équation :

Le discriminant du trinôme est égal à Δ = 92 – 4 x 3 x (–12) = 225

L'équation possède deux solutions : = et =

On en déduit le tableau de variations de *f* :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  –4 1  |
|  | + | – | + |
| *f* |  61 –  |



2)

VIII. Extremum d'une fonction

Théorème : Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle ouvert I.

Si la dérivée *f* ' de *f* s'annule et change de signe en un réel *c* de I alors *f* admet un extremum en *x* = *c*.

Méthode : Rechercher un extremum

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zxyKLqnlMIk**](https://youtu.be/zxyKLqnlMIk)

La fonction *f* définie sur par admet-elle un extremum sur ?

Pour tout *x* réel, on a :

Et : pour .

On dresse alors le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |   |
|  | – |  + |
| *f* |    |

En effet :

La fonction *f* admet donc un minimum égal à en .

IX. Position relative de deux courbes

Méthode : Étudier la position relative de deux courbes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ON14GJOYogw**](https://youtu.be/ON14GJOYogw)

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur par : et .

Étudier la position relative des courbes représentatives et .

On va étudier le signe de la différence :

On pose : .

Pour tout *x* de , on a :

Donc .

On en déduit que la fonction est strictement croissante sur .

On construit le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  2  |
|  |  + |
| *h* |   0  |

D’après le tableau de variations, on a .

Soit : et donc .

On en déduit quela courbe est au-dessus de la courbe sur l’intervalle .

X. Dérivées d’une fonction composée

 1) Définition

Exemple :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/08HgDgD6XL8**](https://youtu.be/08HgDgD6XL8)

On considère la fonction *f* définie par

La fonction *f* est la composée de deux fonctions et telles que :

Les fonctions et sont définies par : et

On dit que la fonction *f* est la composée de par et on note :

Définition : Soit une fonction définie sur un intervalle et prenant ses valeurs dans un intervalle Soit une fonction définie sur un intervalle tel que .

On appelle **fonction composée** de  par  la fonction notée  définie sur l’intervalle par : .

Méthode : Composer deux fonctions

 **Vidéo** [**https://youtu.be/sZ2zqEz4hug**](https://youtu.be/sZ2zqEz4hug)

1) On considère les fonctions et définies par : et .

Exprimer les fonctions et en fonction de *x*.

2) Même question avec et .

1) On a : et

2) On a : et

 2) Formule de dérivation d’une fonction composée

Propriété : Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle et prenant ses valeurs dans un intervalle

Soit une fonction définie et dérivable sur un intervalle tel que .

La fonction est dérivable sur l'intervalle et on a : ou encore

Admis

Méthode : Déterminer la dérivée d’une fonction composée (cas général)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew**](https://youtu.be/lwcFgnbs0Ew)

Déterminer la dérivée de la fonction *f* définie sur par .

On considère les fonctions et définies par : et

Alors :

On a : et

Donc :

 3) Cas particuliers de fonctions composées

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Fonction | Ensemble de définition | Dérivée |
|  |  |  |
|  avec  | Si ,  |  |
|  |   |  |

Démonstrations :

- avec

Donc , car

Soit

- avec

Donc , car

Soit

- Démonstration analogue pour «  ».

Méthode : Déterminer la dérivée de fonctions composées (cas particuliers)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/kE32Ek8BXvs**](https://youtu.be/kE32Ek8BXvs)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/5G4Aa8gKH\_o**](https://youtu.be/5G4Aa8gKH_o)

Déterminer la dérivée des fonctions définies par :

a) b) c)

a) On pose : avec →

Donc :

b) On pose : avec →

Donc :

c) On pose : avec →

Donc :

 4) Étude d’une fonction composée

Méthode : Étudier une fonction composée (1)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0MwFVTHZdpo**](https://youtu.be/0MwFVTHZdpo)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/j-pKLxjHNJw**](https://youtu.be/j-pKLxjHNJw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7c7HeV8cMvo**](https://youtu.be/7c7HeV8cMvo)➞ difficile, pour experts

 **Vidéo** [**https://youtu.be/95eLAWaSwwc**](https://youtu.be/95eLAWaSwwc)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/a1Z29PuSQ64**](https://youtu.be/a1Z29PuSQ64)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/mM24gzGuWcA**](https://youtu.be/mM24gzGuWcA)

On considère la fonction *f* définie par

On note sa courbe représentative dans un repère.

1) Déterminer l'ensemble de définition de *f.*

2) Étudier les limites de *f* aux bornes de son ensemble de définition et en déduire les équations des asymptotes à la courbe .

3) Étudier les variations de *f.*

4) Tracer les asymptotes à la courbe puis la courbe .

1) La fonction racine carrée est définie sur donc la fonction *f* est définie pour

On dresse le tableau de signe :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  – 0  |
|  | – |  – O + |
|  |  – O + | + |
|  | + |  – O + |

Donc la fonction *f* est définie sur .

2) - Recherche des limites à l'infini :

La limite de la fonction rationnelle sous la racine est une forme indéterminée.

Levons l'indétermination :

Or donc

Et donc :

On en déduit, comme limite de fonction composée, que .

On démontre de même que .

Ainsi, la droite d'équation est asymptote horizontale à la courbe en et en .

- Recherche de la limite en :

 et donc .

Donc, comme limite de fonction composée, on a : .

En effet : , en considérant que .

Ainsi la droite d'équation est asymptote verticale à la courbe .

3) On pose :

Donc :

Et donc .

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  0  |
|  | + | ///////////////////////////// | + |
|  |   | ///////////////////////////// |   0  |

A noter : On met une double barre pour la dérivée en 0. En effet, si le dénominateur de la dérivée s’annulerait. La fonction dérivée n’est pas définie en 0.



5)

Méthode : Étudier une fonction composée (2)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/I4HkvkpqjNw**](https://youtu.be/I4HkvkpqjNw)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc**](https://youtu.be/Vx0H1DV3Yqc)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2RIBQ1LiNYU**](https://youtu.be/2RIBQ1LiNYU)

Soit la fonction définie sur ℝ par .

a) Étudier les limites de à l'infini.

b) Calculer la dérivée de la fonction .

c) Dresser le tableau de variations de la fonction .

d) Tracer la courbe représentative de la fonction .

a) - , donc comme limite d’une fonction composée : .

En effet, en posant .

Or, .

Donc , comme limite d’un produit.

- et . Il s’agit d’une forme indéterminée du type «  ».

Levons l’indétermination :

Par croissance comparée, on a : .

En effet, , en considérant que .

Donc, , comme inverse de limite.

Et donc :

Soit : .

b) On a :

En effet :

c) Comme , est du signe de .

est donc positive sur l'intervalle et négative sur l'intervalle .

On dresse le tableau de variations :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* |  2  |
|  |  + 0 –  |
|  |   0 |

En effet :

d)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)