SECOND DEGRÉ

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :
- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{3}{5}$
- $h(x) = 4 - 2x^2$
- $k(x) = (x - 4)(5 - 2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n(x) = 5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/OQHf-hX9JhM

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 2x^2 - 20x + 10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$f(x) =$ ☺$(x -$ ☺$)^2 +$ ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 20x + 10 \\ &= 2[x^2 - 10x] + 10 \\ &= 2[x^2 - 10x + 25 - 25] + 10 \\ &= 2[(x-5)^2 - 25] + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 50 + 10 \\ &= 2(x-5)^2 - 40 \end{aligned}$$

car $x^2 - 10x$ est le début du développement de $(x-5)^2$ et $(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de f.

Propriété :
Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta, \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de f.

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x\right] + c$

$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$

$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$

$= a(x-\alpha)^2 + \beta$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Remarque : Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d'utiliser les deux dernières formules donnant α et β… à condition de les connaître !

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

$$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.
Or $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.
f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :
Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.
- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

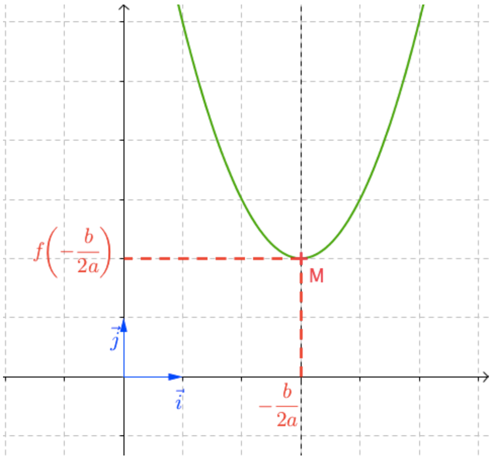
Remarque :
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(voir résultat de la démonstration dans II.)

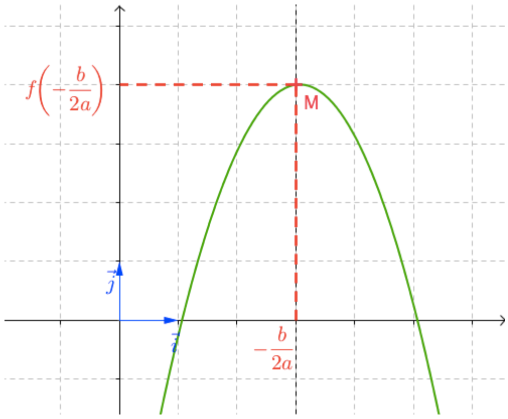
- Si $a > 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↘	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↗

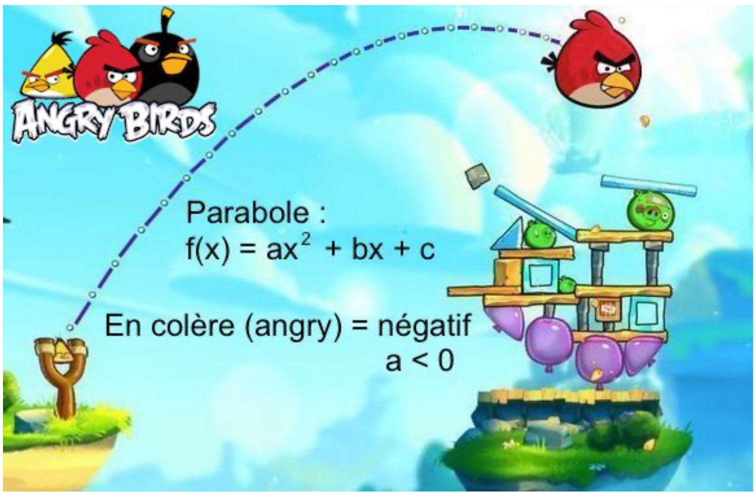


- Si $a < 0$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
f	↗	$f\left(-\frac{b}{2a}\right)$	↘



Dans un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.
Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a}\,;\,f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole.
Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.
La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.



Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/KK76UohzUW4

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

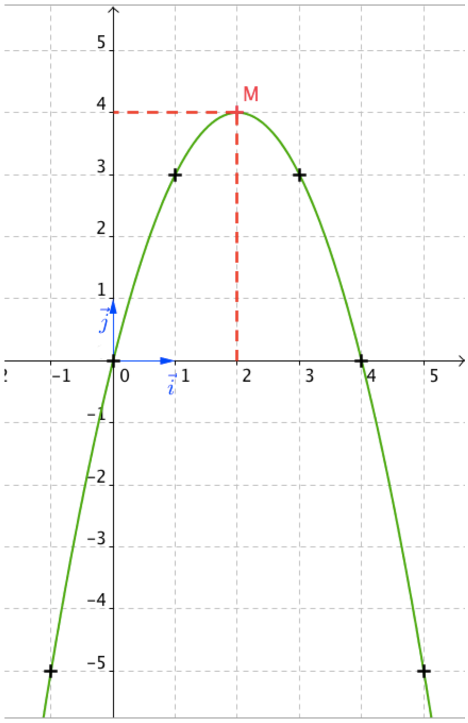
$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -((x-2)^2 - 4) \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

f admet donc un maximum en 2 égal à
$f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↗	4	↘

On obtient la courbe représentative de f ci-contre.



Méthode : Déterminer les caractéristiques d'une parabole

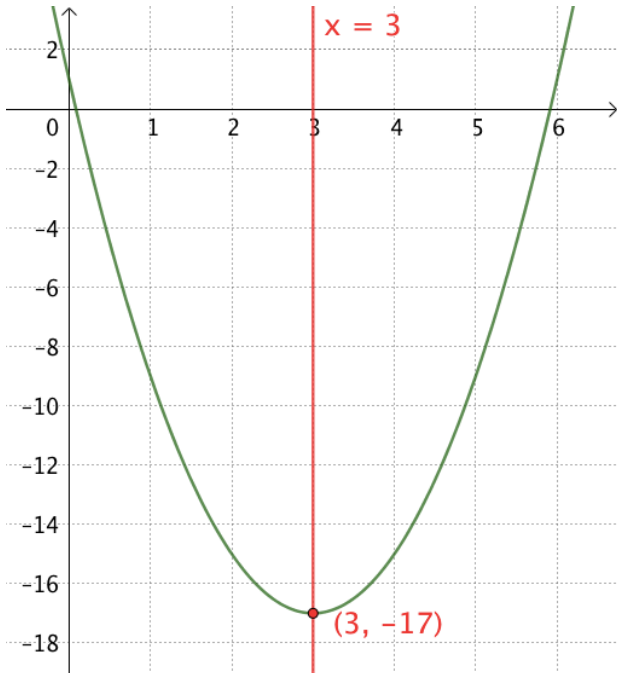
Vidéo https://youtu.be/7lOCVfUnoz0

Déterminer l'axe de symétrie et le sommet de la parabole d'équation
$y = 2x^2 - 12x + 1$.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x = -\frac{b}{2a}$, soit $x = -\frac{-12}{2\times 2} = 3$.
La droite d'équation $x = 3$ est donc axe de symétrie de la parabole d'équation
$y = 2x^2 - 12x + 1$.

- Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit :
$(3\ ; 2\times 3^2 - 12\times 3 + 1) = (3\ ; -17)$
Le point de coordonnées $(3\ ; -17)$ est donc le sommet de la parabole.

$a = 2 > 0$, ce sommet correspond à un minimum.



IV. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme
$ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Propriété démontrée dans le paragraphe II.

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ c) $x^2 + 3x + 10 = 0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - x - 6 = 0$:
a = 2, b = –1 et c = –6 donc $\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2} = 2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$:

a = 2, b = –3 et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$.

Comme $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times2} = \frac{3}{4}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2 + 3x + 10 = 0$:
a = 1, b = 3 et c = 10 donc $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$.

Comme $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ sont donnés par : $S = -\frac{b}{a}$ et $P = \frac{c}{a}$.

Exercice : Démontrer ces deux formules.

V. Factorisation d'un trinôme

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/7VFpZ63Tgis

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.

Donc :
$ax^2 + bx + c = 0$ peut s'écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}=0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a}=0$$
$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a}$$
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{\Delta}{4a^2}$$

car a est non nul.

- Si $\Delta < 0$: Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{\Delta}{4a^2}<0\right)$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ peut s'écrire :
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$

- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2+bx+c=0$ est équivalente à :

$$x+\frac{b}{2a}=-\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$
$$x+\frac{b}{2a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x+\frac{b}{2a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$
$$x=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$$
$$x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{ou} \quad x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a deux solutions distinctes : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ ou $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=ax^2+bx+c$.
- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x-x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1Iisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2+19x-5$ b) $9x^2-6x+1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2+19x-5$:

Calcul du discriminant : Δ = 19² – 4 x 4 x (–5) = 441

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4} = \frac{1}{4}$

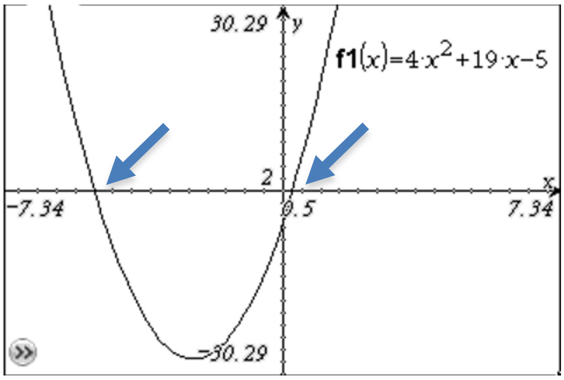
On a donc :

$4x^2 + 19x - 5 = 4(x - (-5))\left(x - \frac{1}{4}\right)$

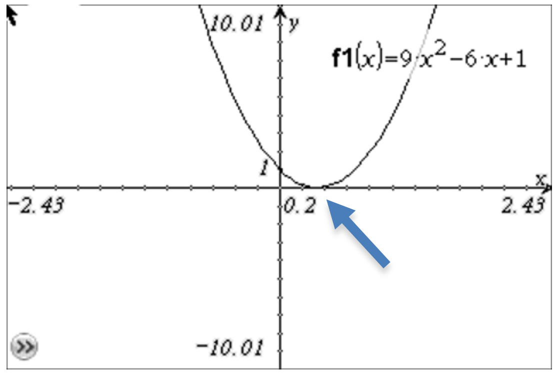
$= (x + 5)(4x - 1)$.

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !

On peut lire une valeur approchée des racines sur l



b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:



Calcul du discriminant : Δ = (–6)² – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$

On a donc :

$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x - 1)^2$.

<u>Exercice d'approfondissement pour aller plus loin :</u>

Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^2-3x-2} - \frac{x^2}{2x^2+13x+6} = 0$

- On commence par factoriser les expressions $2x^2 - 3x - 2$ et $2x^2 + 13x + 6$.

Le discriminant de $2x^2 - 3x - 2$ est Δ = (–3)² – 4 x 2 x (–2) = 25 et ses racines sont :

$x_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{2\times 2} = \frac{-1}{2}$ et $x_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{2\times 2} = 2$

On a donc : $2x^2 - 3x - 2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) = (2x + 1)(x - 2)$. .

Le discriminant de $2x^2 + 13x + 6$ est Δ' = 13² – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :

$x_1' = \frac{-13-\sqrt{121}}{2\times 2} = -6$ et $x_2' = \frac{-13+\sqrt{121}}{2\times 2} = \frac{-1}{2}$

On a donc : $2x^2 + 13x + 6 = 2(x + 6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x + 6)(2x + 1)$. .

- L'équation (E) s'écrit alors : $\frac{x-2}{(2x+1)(x-2)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

Les valeurs –6, $\frac{-1}{2}$ et 2 annulent les dénominateurs. On résout alors (E) sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-6\,;\, -\frac{1}{2}\,;\, 2\right\}$:

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6}{(2x+1)(x+6)} - \frac{x^2}{(x+6)(2x+1)} = 0$

$\frac{x+6-x^2}{(2x+1)(x+6)} = 0$

$x + 6 - x^2 = 0$ car $x \neq -\frac{1}{2}$ et $x \neq -6$.

Le discriminant de $-x^2 + x + 6$ est Δ" = 1^2 – 4 x (–1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x_1'' = \frac{-1-\sqrt{25}}{2\times(-1)}$ = 3 et $x_2'' = \frac{-1+\sqrt{25}}{2\times(-1)}$ = –2

Les solutions de l'équation (E) sont : –2 et 3.

VI. Signe d'un trinôme

Vidéo https://youtu.be/sFNW9KVsTMY
Vidéo https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q
Vidéo https://youtu.be/JCVotquzlIA

Remarque préliminaire :
Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$:

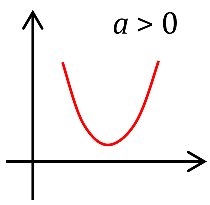
- si a > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut : 

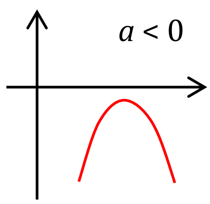
- si a < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas : 

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si Δ < 0 :

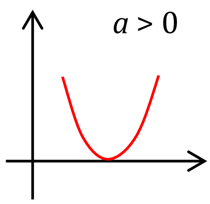
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a

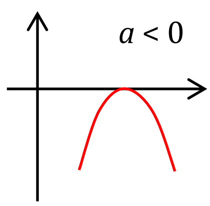




- Si Δ = 0 :

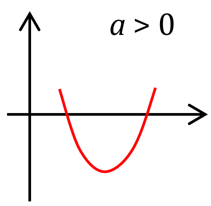
x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe de a

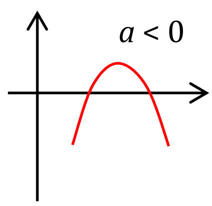




- Si Δ > 0 :

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$f(x)$	Signe de a	0	Signe opposé de a	0	Signe de a





Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

Vidéo https://youtu.be/AEL4qKKNvp8

Résoudre l'inéquation : $x^2+3x-5<-x+2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$x^2+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^2+4x-7<0$.

Le discriminant de x^2+4x-7 est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

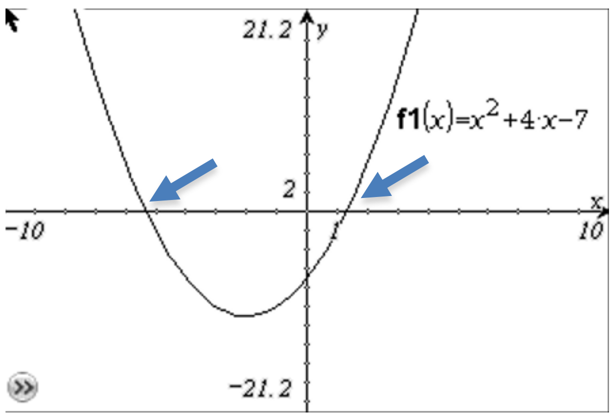
$x_1=\frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1}=-2-\sqrt{11}$ et $x_2=\frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1}=-2+\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+3x-5<-x+2$ est donc $]-2-\sqrt{11}\,;\,-2+\sqrt{11}[$.

Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !
On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.



Exercice d'approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$

$\frac{1}{x^2-x-6}\geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^2-x-6}-2\geq 0$

Soit : $\frac{1}{x^2-x-6}-\frac{2(x^2-x-6)}{x^2-x-6}\geq 0$

Soit encore : $\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

- On commence par déterminer les racines du trinôme $x^2 - x - 6$:
Le discriminant est Δ = $(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ et ses racines sont :
$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{2\times1} = -2$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{2\times1} = 3$
Les valeurs –2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans $\mathbb{R} \setminus \{-2\,;3\}$.

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2 + 2x + 13$:
Le discriminant est $\Delta' = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108$ et ses racines sont :
$x_1{}' = \frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2{}' = \frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		–	0	+	|	+	|	+	0	–	
x^2-x-6		+	|	+	0	–	0	+	|	+	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		–	0	+	||	–	||	+	0	–	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est :

$$\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2}\,;\,-2\right[\cup \left]3\,;\,\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$$

VII. Application : position relative de deux courbes

Méthode : Étudier la position de deux courbes

Vidéo https://youtu.be/EyxP5HlfyF4

Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

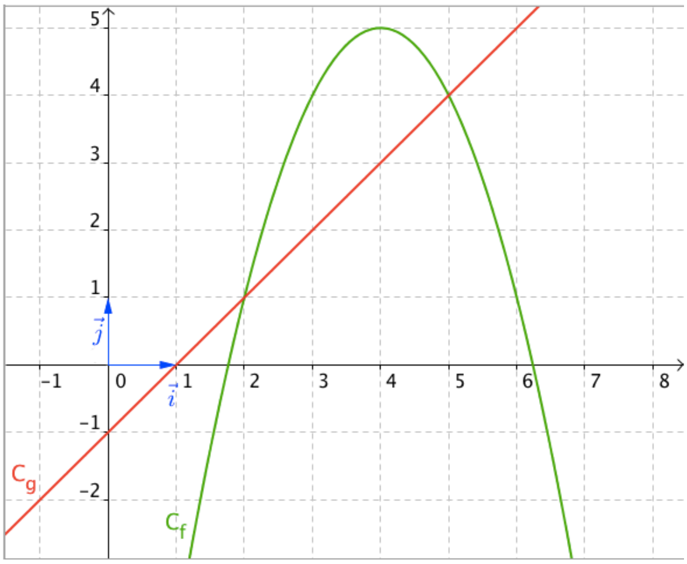
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - x + 1 = -x^2 + 7x - 10$.
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-10) = 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$
On dresse le tableau de signes du trinôme $-x^2 + 7x - 10$:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		–	O	+	O	–	

On conclut :

La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty\,;2] \cup [5\,;\,+\infty[$.

La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2\,;5]$.



VIII. Fonction polynôme de degré 3

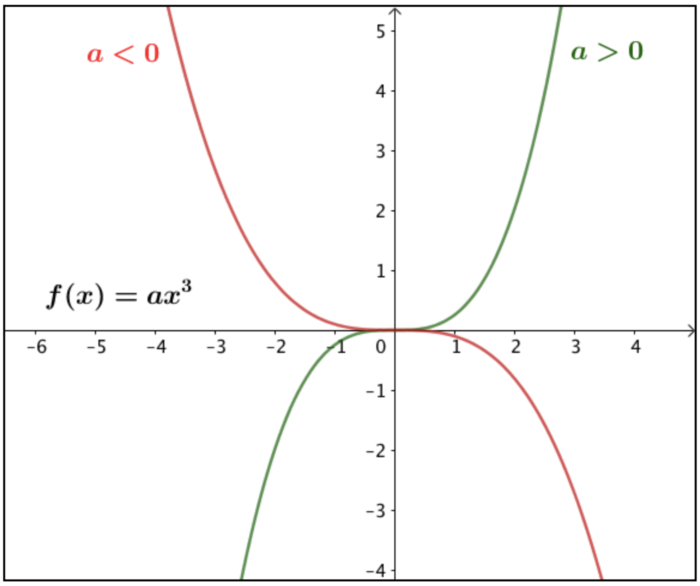
1) Exemples et contre-exemples

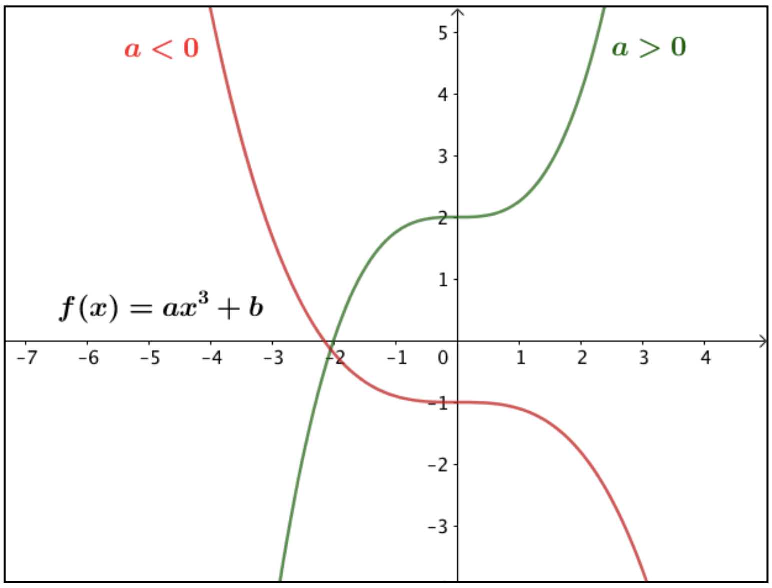
- $f(x) = 4x^3 + 1$
- $g(x) = x^3 - 2$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
- $f(x) = 1 + x^2 - 2x^3$

- $m(x) = -x + 4$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 2x^5 - x^3 + 5x - 1$ est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \longmapsto ax^3$ ou $x \longmapsto ax^3 + b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.
Les coefficients a et b sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

2) Représentation graphique





Propriétés :
Soit f une fonction polynôme de degré 3, telle que $f(x) = ax^3 + b$.
- Si a < 0 : f est strictement croissante.
- Si a < 0 : f est strictement décroissante.

3) Forme factorisée d'une fonction polynôme de degré 3

Exemple :
La fonction f définie par $f(x) = 5(x-4)(x-1)(x+3)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.
Si on développe l'expression de f à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient bien l'expression de degré 3 : $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

Développer(5(x–4)(x–1)(x+3))

$\rightarrow$ $5x^3 - 10x^2 - 55x + 60$

Définition : Les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.
Les coefficients a, x_1, x_2 et x_3 sont des réels avec $a \neq 0$.

En partant de l'expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et –3 sont des racines du polynôme f.
$f(4) = 5 \times 4^3 - 10 \times 4^2 - 55 \times 4 + 60 = 320 - 160 - 220 + 60 = 0$
$f(1) = 5 \times 1^3 - 10 \times 1^2 - 55 \times 1 + 60 = 5 - 10 - 55 + 60 = 0$
$f(-3) = 5 \times (-3)^3 - 10 \times (-3)^2 - 55 \times (-3) + 60 = -135 - 90 + 165 + 60 = 0$

4, 1 et –3, solutions de l'équation $f(x) = 0$, sont donc des racines de f.

Propriété : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$.
L'équation $f(x) = 0$ possède trois solutions (éventuellement égales) : $x = x_1$, $x = x_2$ et $x = x_3$ appelées les **racines** de la fonction polynôme f.

Méthode : Étudier le signe d'un polynôme de degré 3

Vidéo https://youtu.be/g0PfyqHSkBg

Étudier le signe de la fonction polynôme f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$$

2 étant un nombre positif, le signe de $2(x+1)(x-2)(x-5)$ dépend du signe de chaque facteur : $x + 1$, $x - 2$ et $x - 5$.
On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

$x + 1 = 0$ ou $x - 2 = 0$ ou $x - 5 = 0$
$x = -1$ $x = 2$ $x = 5$

–1, 2 et 5 sont donc les racines du polynôme f.

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $f(x) = 2(x+1)(x-2)(x-5)$.

x	$-\infty$		-1		2		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $f(x) \geq 0$ pour $x \in [-1\,;2] \cup [5\,;\,+\infty[$ et

$f(x) \leq 0$ pour $x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [2\,;5]$.

La représentation de la fonction f à l'aide d'un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.