SECOND DEGRÉ

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle **fonction polynôme de degré 2** toute fonction *f* définie sur $R$ par une expression de la forme :

 $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$

où les coefficients *a*, *b* et *c* sont des réels donnés avec $a\ne 0$.

Remarque :

Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f\left(x\right)=3x^{2}-7x+3$

- $g\left(x\right)=\frac{1}{2}x^{2}-5x+\frac{3}{5}$

- $h\left(x\right)=4-2x^{2}$

- $k\left(x\right)=\left(x-4\right)\left(5-2x\right)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

- $m\left(x\right)=5x-3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n\left(x\right)=5x^{4}-7x^{3}+3x-8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OQHf-hX9JhM**](https://youtu.be/OQHf-hX9JhM)

Soit la fonction *f* définie sur $R$ par : $f\left(x\right)=2x^{2}-20x+10$.

On veut exprimer la fonction *f* sous sa forme canonique :

 $f\left(x\right)=$☺(*x* $-$ ☺)2 + ☺

 où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

car $x^{2}-10x$ est le début du développement de $\left(x-5\right)^{2}$

et $\left(x-5\right)^{2}=x^{2}-10x+25$

$$f\left(x\right)=2x^{2}-20x+10$$

$$ =2\left[x^{2}-10x\right]+10$$

$$ =2\left[x^{2}-10x+25-25\right]+10$$

$$ =2\left[\left(x-5\right)^{2}-25\right]+10$$

$$ =2\left(x-5\right)^{2}-50+10$$

$$ =2\left(x-5\right)^{2}-40$$

$f(x)=2\left(x-5\right)^{2}-40$ est la forme canonique de *f*.

Propriété :

Toute fonction polynôme *f* de degré 2 définie sur $R$ par $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ peut s'écrire sous la forme :

 $f\left(x\right)=a\left(x-α\right)^{2}+β$, où $α$ et $β$ sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la **forme canonique** de *f*.

Démonstration :

Comme $a\ne 0$, on peut écrire pour tout réel *x* :

$$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$$

$$=a\left[x^{2}+\frac{b}{a}x\right]+c$$

$$=a\left[x^{2}+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^{2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^{2}\right]+c$$

$$=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\left(\frac{b}{2a}\right)^{2}\right]+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-a\frac{b^{2}}{4a^{2}}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{b^{2}}{4a}+c$$

$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$$

$$=a\left(x-α\right)^{2}+β$$

avec $α=-$ $\frac{b}{2a}$ et $β=$ $-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$.

Remarque : Pour écrire un trinôme sous sa forme canonique, il est possible d’utiliser les deux dernières formules donnant 𝛼 et 𝛽… à condition de les connaître !

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par :

$$f\left(x\right)=2\left(x-1\right)^{2}+3$$

Alors : $f(x)\geq 3$ car $2\left(x-1\right)^{2}$est positif.

Or $f\left(1\right)=3$ donc pour tout x, $f\left(x\right)\geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x)=a\left(x-α\right)^{2}+β$, avec

$a\ne 0$.

- Si $a>0$, *f* admet un minimum pour $x=α$. Ce minimum est égal à $β$.

- Si $a<0$, *f* admet un maximum pour$ x=α$. Ce maximum est égal à $β$.

Remarque :

Soit la fonction *f* définie sur $R$ par : $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$, avec $a\ne 0$.

On peut retenir que *f* admet un maximum (ou un minimum) pour$ x=-$ $\frac{b}{2a}$.

*(voir résultat de la démonstration dans II.)*



* Si $a>0$:

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ $-$ $\frac{b}{2a}$ $+\infty $ |
| *f* |  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |



* Si $a<0$:

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ $-$ $\frac{b}{2a}$ $+\infty $ |
| *f* |  $f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ |

Dans un repère orthogonal $\left(O ;\vec{i}, \vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**.

Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole.

Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction *f*.

La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x=-$ $\frac{b}{2a}$.



Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

 **Vidéo** [**https://youtu.be/KK76UohzUW4**](https://youtu.be/KK76UohzUW4)

Représenter graphiquement la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=-x^{2}+4x$.

Commençons par écrire la fonction *f* sous sa forme canonique :

$$f\left(x\right)=-x^{2}+4x$$

 $=-\left(x^{2}-4x\right)$

 $=-\left(x^{2}-4x+4-4\right)$

 $=-\left(\left(x-2\right)^{2}-4\right)$

 $=-\left(x-2\right)^{2}+4$

*f* admet donc un maximum en 2 égal à

 $f\left(2\right)=-\left(2-2\right)^{2}+4=4$

Les variations de *f* sont donc données par

le tableau suivant :

On obtient la courbe représentative de *f* ci-contre.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d’une parabole

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7IOCVfUnoz0**](https://youtu.be/7IOCVfUnoz0)

Déterminer l’axe de symétrie et le sommet de la parabole d’équation$ $

$y=2x^{2}-12x+1$.

- La parabole possède un axe de symétrie d'équation $x=-$ $\frac{b}{2a}$, soit $x=-$ $\frac{-12}{2×2}$ = 3.

La droite d’équation $x=3$ est donc axe de symétrie de la parabole d’équation

$y=2x^{2}-12x+1$.

- Les coordonnées de son sommet sont : $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$, soit :

$\left(3 ;2×3^{2}-12×3+1\right)=\left(3 ; -17\right)$

Le point de coordonnées $\left(3 ; -17\right)$ est donc le sommet de la parabole.

$a=2>0$, ce sommet correspond à un minimum.



IV. Résolution d'une équation du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme

 $ax^{2}+bx+c=0$ où *a*, *b* et *c* sont des réels avec $a\ne 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^{2}+bx+c$.

Exemple :

L'équation $3x^{2}-6x-2=0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^{2}+bx+c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^{2}-4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^{2}+bx+c$.

- Si Δ < 0 : L'équation $ax^{2}+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.

- Si Δ = 0 : L'équation $ax^{2}+bx+c=0$ a une unique solution : $x\_{0}=$ $\frac{-b}{2a}$.

- Si Δ > 0 : L'équation $ax^{2}+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

 $x\_{1}=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}$ et $x\_{2}=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}$.

*Propriété démontrée dans le paragraphe II.*

Méthode : Résoudre une équation du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/youUIZ-wsYk**](https://youtu.be/youUIZ-wsYk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RhHheS2Wpyk**](https://youtu.be/RhHheS2Wpyk)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/v6fI2RqCCiE**](https://youtu.be/v6fI2RqCCiE)

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^{2}-x-6=0$ b) $2x^{2}-3x+\frac{9}{8}=0$ c) $x^{2}+3x+10=0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^{2}-x-6=0$ :

 *a* = 2, *b* = –1 et *c* = –6 donc Δ = $b^{2}-4ac$ = (–1)2 – 4 x 2 x (–6) = 49.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

 $x\_{1}=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}=$ $\frac{-\left(-1\right)-\sqrt{49}}{2×2}$ $=-$ $\frac{3}{2}$

 $x\_{2}=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}=$ $\frac{-\left(-1\right)+\sqrt{49}}{2×2}$ $=2$

b) Calculons le discriminant de l'équation $2x^{2}-3x+\frac{9}{8}=0$ :

 *a* = 2, *b* = –3 et *c* =  donc Δ = $b^{2}-4ac$ = (–3)2 – 4 x 2 x  = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

 $x\_{0}=-$ $\frac{b}{2a}=-$ $\frac{-3}{2×2}$ $=$ $\frac{3}{4}$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^{2}+3x+10=0$ :

 *a* = 1, *b* = 3 et *c* = 10 donc Δ = $b^{2}-4ac$ = 32 – 4 x 1 x 10 = –31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.

Propriété : La somme S et le produit P des racines d’un polynôme du second degré de la forme $ax^{2}+bx+c=0$ sont donnés par : $S=-$ $\frac{b}{a}$ et $P=$ $\frac{c}{a}$.

Exercice : Démontrer ces deux formules.

V. Factorisation d'un trinôme

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/7VFpZ63Tgis**](https://youtu.be/7VFpZ63Tgis)

On a vu dans le chapitre "Second degré (partie 1)" que la fonction *f* définie sur $R$ par $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ peut s'écrire sous sa forme canonique :

$f(x)=a\left(x-α\right)^{2}+β$ avec $α=-$ $\frac{b}{2a}$ et $β=$ $-\frac{b^{2}-4ac}{4a}$.

Donc :

$ax^{2}+bx+c=0$ peut s’écrire :

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{b^{2}-4ac}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}-\frac{Δ}{4a}=0$$

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=\frac{Δ}{4a^{2}}$$

 car *a* est non nul.

* Si Δ < 0 : Comme un carré ne peut être négatif $\left(\frac{Δ}{4a^{2}}<0\right)$, l'équation

$ax^{2}+bx+c=0$ n'a pas de solution.

* Si Δ = 0 : L'équation $ax^{2}+bx+c=0$ peut s'écrire :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^{2}=0$$

L'équation n'a qu'une seule solution : 

* Si Δ > 0 : L'équation $ax^{2}+bx+c=0$ est équivalente à :

$ x+$ $\frac{b}{2a}$ $=-$ $\sqrt{\frac{Δ}{4a^{2}}}$ ou $x+$ $\frac{b}{2a}$ $=$ $\sqrt{\frac{Δ}{4a^{2}}}$

$ x+$ $\frac{b}{2a}$ $=-$ $\frac{\sqrt{Δ}}{2a}$ ou $x+$ $\frac{b}{2a}$ $=$ $\frac{\sqrt{Δ}}{2a}$

$ x=-$ $\frac{\sqrt{Δ}}{2a}$ $-$ $\frac{b}{2a}$ ou $x$ $=$ $\frac{\sqrt{Δ}}{2a}-$ $\frac{b}{2a}$

$ x=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}$ ou$ x=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}$

L'équation a deux solutions distinctes : $ x\_{1}=$ $\frac{-b-\sqrt{Δ}}{2a}$ ou$ x\_{2}=$ $\frac{-b+\sqrt{Δ}}{2a}$

Propriété : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur  par

$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$.

- Si Δ = 0 : Pour tout réel *x*, on a : $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{0}\right)^{2}$.

- Si Δ > 0 : Pour tout réel *x*, on a : $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)$.

Remarque : Si Δ < 0, il n’existe pas de forme factorisée de *f*.

Méthode : Factoriser un trinôme

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eKrZK1Iisc8**](https://youtu.be/eKrZK1Iisc8)

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^{2}+19x-5$ b) $9x^{2}-6x+1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^{2}+19x-5 $:

Calcul du discriminant : Δ = 192 – 4 x 4 x (–5) = 441

Les racines sont : $x\_{1}=$ $\frac{-19-\sqrt{441}}{2×4}$ = –5 et $x\_{2}=$ $\frac{-19+\sqrt{441}}{2×4}$ = $\frac{1}{4}$



On a donc :

$$4x^{2}+19x-5=4\left(x-\left(-5\right)\right)\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

$=\left(x+5\right)\left(4x-1\right)$.

*Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !*

*On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.*



b) On cherche les racines du trinôme $9x^{2}-6x+1$ :

Calcul du discriminant : Δ = (–6)2 – 4 x 9 x 1 = 0

La racine (double) est : $x\_{0}=-$ $\frac{-6}{2×9}$ = $\frac{1}{3}$

On a donc :

$9x^{2}-6x+1=9\left(x-\frac{1}{3}\right)^{2}=\left(3x-1\right)^{2}$.

Exercice d’approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l'équation (E) : $\frac{x-2}{2x^{2}-3x-2}$ $-$ $\frac{x^{2}}{2x^{2}+13x+6}$ $=0$

- On commence par factoriser les expressions $2x^{2}-3x-2$ et $2x^{2}+13x+6$.

Le discriminant de $2x^{2}-3x-2$ est Δ = (–3)2 – 4 x 2 x (–2) = 25 et ses racines sont :

$x\_{1}=$ $\frac{3-\sqrt{25}}{2×2}$ = $\frac{-1}{2}$ et $x\_{2}=$ $\frac{3+\sqrt{25}}{2×2}$ = $2$

On a donc : $2x^{2}-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-2\right)=\left(2x+1\right)\left(x-2\right)$. .

Le discriminant de $2x^{2}+13x+6$ est Δ' = 132 – 4 x 2 x 6 = 121 et ses racines sont :

$x\_{1}'=$ $\frac{-13-\sqrt{121}}{2×2}$ = –6 et $x\_{2}'=$ $\frac{-13+\sqrt{121}}{2×2}$ = $\frac{-1}{2}$

On a donc : $2x^{2}+13x+6=2\left(x+6\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)=\left(x+6\right)\left(2x+1\right)$. .

- L'équation (E) s'écrit alors : $\frac{x-2}{\left(2x+1\right)\left(x-2\right)}$ $-$ $\frac{x^{2}}{\left(x+6\right)\left(2x+1\right)}$ $=0$

Les valeurs –6, $\frac{-1}{2}$ et 2 annulent les dénominateurs. On résout alors (E) sur

$R∖\left\{-6 ; -\frac{1}{2} ; 2\right\} $:

(E) s'écrit : $\frac{1}{2x+1}$ $-$ $\frac{x^{2}}{\left(x+6\right)\left(2x+1\right)}$ $=0$

$\frac{x+6}{\left(2x+1\right)\left(x+6\right)}$ $-$ $\frac{x^{2}}{\left(x+6\right)\left(2x+1\right)}$ $=0$

$\frac{x+6-x^{2}}{\left(2x+1\right)\left(x+6\right)}$ $=0$

$x+6-x^{2}=0$ car $x\ne -$ $\frac{1}{2}$ et $x\ne -6$.

Le discriminant de $-x^{2}+x+6$ est Δ'' = 12 – 4 x (–1) x 6 = 25.

Les racines sont : $x\_{1}''=$ $\frac{-1-\sqrt{25}}{2×\left(-1\right)}$ = 3 et $x\_{2}''=$ $\frac{-1+\sqrt{25}}{2×\left(-1\right)}$ = –2

Les solutions de l'équation (E) sont : –2 et 3.

VI. Signe d'un trinôme

 **Vidéo** [**https://youtu.be/sFNW9KVsTMY**](https://youtu.be/sFNW9KVsTMY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q**](https://youtu.be/pT4xtI2Yg2Q)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JCVotquzIIA**](https://youtu.be/JCVotquzIIA)

Remarque préliminaire :

Pour une fonction polynôme de degré 2 définie par $f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$ :

- si *a* > 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le haut :

- si *a* < 0, sa représentation graphique est une parabole tournée vers le bas :

Propriété : Soit *f* une fonction polynôme de degré 2 définie sur $R$ par

$f\left(x\right)=ax^{2}+bx+c$.

*a* > 0

*a* < 0

- Si Δ < 0 :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ $+\infty $ |
| *f*(*x*) | Signe de *a*  |

- Si Δ = 0 :

*a* > 0

*a* < 0

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ $x\_{0}$ $+\infty $ |
| *f*(*x*) | Signe de *a* OSigne de *a*  |

- Si Δ > 0 :

*a* > 0

*a* < 0

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ $x\_{1}$ $x\_{2}$ $+\infty $ |
| *f*(*x*) | Signe de *a* OSigne opposé O Signe de *a* de *a* |

Méthode : Résoudre une inéquation du second degré

 **Vidéo** [**https://youtu.be/AEL4qKKNvp8**](https://youtu.be/AEL4qKKNvp8)

Résoudre l’inéquation : $x^{2}+3x-5<-x+2$

*On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.*

$x^{2}+3x-5<-x+2$ équivaut à $x^{2}+4x-7<0$.

Le discriminant de $x^{2}+4x-7$ est Δ = 42 – 4 x 1 x (–7) = 44 et ses racines sont :

$x\_{1}=$ $\frac{-4-\sqrt{44}}{2×1}$ $=-2-\sqrt{11}$ et $x\_{2}=$ $\frac{-4+\sqrt{44}}{2×1}$ $=-2+\sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :



L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^{2}+3x-5<-x+2$ est donc $\left]-2-\sqrt{11} ; -2+\sqrt{11}\right[$.

*Une vérification à l'aide de la calculatrice n'est jamais inutile !*

*On peut lire une valeur approchée des racines sur l'axe des abscisses.*

Exercice d’approfondissement pour aller plus loin :

Résoudre l’inéquation $\frac{1}{x^{2}-x-6}$ $\geq 2$

$\frac{1}{x^{2}-x-6}$ $\geq 2$ équivaut à $\frac{1}{x^{2}-x-6}$ $-2\geq 0$

Soit : $\frac{1}{x^{2}-x-6}$ $-$ $\frac{2\left(x^{2}-x-6\right)}{x^{2}-x-6}$ $\geq 0$

Soit encore : $\frac{-2x^{2}+2x+13}{x^{2}-x-6}$ $\geq 0$

- On commence par déterminer les racines du trinôme $x^{2}-x-6 $:

Le discriminant est Δ = (–1)2 – 4 x 1 x (–6) = 25 et ses racines sont :

$x\_{1}=$ $\frac{1-\sqrt{25}}{2×1}$ $=-2$ et $x\_{2}=$ $\frac{1+\sqrt{25}}{2×1}$ $=3$

Les valeurs –2 et 3 annulent le dénominateur. On résout donc l'équation dans

$R∖\left\{-2 ;3\right\}$.

- On détermine les racines du trinôme $-2x^{2}+2x+13$ :

Le discriminant est Δ' = 22 – 4 x (–2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x\_{1}'=$ $\frac{-2-\sqrt{108}}{2×\left(-2\right)}$ $=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x\_{2}'=$ $\frac{-2+\sqrt{108}}{2×\left(-2\right)}$ $=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On obtient le tableau de signe :



L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^{2}-x-6}$ $\geq 2$ est :

$$\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2} ; -2\right[∪\left]3 ; \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$$

VII. Application : position relative de deux courbes

Méthode : Étudier la position de deux courbes

 **Vidéo** [**https://youtu.be/EyxP5HIfyF4**](https://youtu.be/EyxP5HIfyF4)

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur $R$ par : $f\left(x\right)=-x^{2}+8x-11$ et $g\left(x\right)=x-1$.

Étudier la position relative des courbes représentatives $C\_{f}$ et $C\_{g}$.

On va étudier le signe de la différence $f\left(x\right)-g\left(x\right)$:

$f\left(x\right)-g\left(x\right)=-x^{2}+8x-11-x+1=-x^{2}+7x-10$.

Le discriminant du trinôme $-x^{2}+7x-10$ est Δ = 72 – 4 x (–1) x (–10) = 9

Le trinôme possède deux racines distinctes :

$x\_{1}=$ $\frac{-7-\sqrt{9}}{2×\left(-1\right)}$ $=5$ et $x\_{2}=$ $\frac{-7+\sqrt{9}}{2×\left(-1\right)}$ $=2$

On dresse le tableau de signes du trinôme $ -x^{2}+7x-10$ :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | $-\infty $ 2 5 $+\infty $ |
| $$f\left(x\right)-g\left(x\right)$$ |  – O + O – |



On conclut :

La courbe $C\_{f}$ est en-dessous de la courbe $C\_{g}$ pour tout *x* de

 $\left]-\infty ;2\right]∪\left[5 ; +\infty \right[$.

La courbe $C\_{f}$ est au-dessus de la courbe $C\_{g}$ pour tout *x* de $\left[2 ;5\right]$.

VIII. Fonction polynôme de degré 3

1) Exemples et contre-exemples

- $f\left(x\right)=4x^{3}+1$

- $g\left(x\right)=x^{3}-2$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

- $f\left(x\right)=1+x^{2}-2x^{3}$

- $m\left(x\right)=-x+4$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n\left(x\right)=2x^{5}-x^{3}+5x-1$ est une fonction polynôme de degré 5.

Définition : Les fonctions définies sur $R$ par $x⟼ax^{3}$ ou $x⟼ax^{3}+b$ sont des **fonctions polynômes de degré 3**.

Les coefficients *a* et *b* sont des réels donnés avec $a\ne 0$.

2) Représentation graphique



Propriétés :

Soit *f* une fonction polynôme de degré 3, telle que$ f\left(x\right)=ax^{3}+b$.

- Si *a* < 0 : *f* est strictement croissante.

- Si *a* < 0 : *f* est strictement décroissante.

3) Forme factorisée d’une fonction polynôme de degré 3

Exemple :

La fonction *f* définie par $f\left(x\right)=5\left(x-4\right)\left(x-1\right)\left(x+3\right)$ est une fonction polynôme de degré 3 sous sa forme factorisée.

Si on développe l’expression de *f* à l’aide d’un logiciel de calcul formel, on obtient bien l’expression de degré 3 : $f\left(x\right)=5x^{3}-10x^{2}-55x+60$



Définition : Les fonctions définies sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)\left(x-x\_{3}\right)$ sont des fonctions polynômes de degré 3.

Les coefficients *a*, *x1*, *x2* et *x3* sont des réels avec $a\ne 0$.

En partant de l’expression développée précédente, on peut vérifier que 4, 1 et –3 sont des racines du polynôme *f*.

$$f\left(4\right)=5×4^{3}-10×4^{2}-55×4+60=320-160-220+60=0$$

$$f\left(1\right)=5×1^{3}-10×1^{2}-55×1+60=5-10-55+60=0$$

$$f\left(-3\right)=5×\left(-3\right)^{3}-10×\left(-3\right)^{2}-55×\left(-3\right)+60=-135-90+165+60=0$$

4, 1 et –3, solutions de l’équation $f\left(x\right)=0$, sont donc des racines de *f*.

Propriété : Soit la fonction *f* définie sur ℝ par $f\left(x\right)=a\left(x-x\_{1}\right)\left(x-x\_{2}\right)\left(x-x\_{3}\right)$.

L’équation $f\left(x\right)=0$ possède trois solutions (éventuellement égales) :$ x=x\_{1}$, $x=x\_{2}$ et $x=x\_{3}$ appelées les **racines** de la fonction polynôme *f*.

Méthode : Étudier le signe d’un polynôme de degré 3

 **Vidéo** [**https://youtu.be/g0PfyqHSkBg**](https://youtu.be/g0PfyqHSkBg)

Étudier le signe de la fonction polynôme *f* définie sur ℝ par :

$$ f\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$$

2 étant un nombre positif, le signe de $2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$ dépend du signe de chaque facteur : *x* + 1, *x* – 2 et *x* – 5.

On étudie ainsi le signe de chaque facteur et on présente les résultats dans un tableau de signes.

 *x* + 1 = 0 ou *x* – 2 = 0 ou *x* – 5 = 0

 *x* = –1 *x* = 2 *x* = 5

–1, 2 et 5 sont donc les racines du polynôme *f.*

En appliquant la règle des signes dans le tableau suivant, on pourra en déduire le signe du produit $ f\left(x\right)=2\left(x+1\right)\left(x-2\right)\left(x-5\right)$.



On en déduit que $f(x)\geq 0$ pour $x\in \left[-1 ;2\right]∪\left[5 ; +\infty \right[$ et

$f(x)\leq 0$ pour $x\in \left]-\infty ; -1\right]∪\left[2 ;5\right]$.

La représentation de la fonction *f* à l’aide d’un logiciel permet de confirmer les résultats établis précédemment.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)