NOMBRES COMPLEXES

Les nombres complexes prennent naissance au XVIème siècle lorsqu'un italien *Gerolamo Cardano* (1501 ; 1576), ci-contre, au nom francisé de *Jérôme Cardan*, introduit $\sqrt{-15}$ pour résoudre des équations du troisième degré.
En 1572, un autre italien, *Rafaele Bombelli* (1526 ; 1573) publie "*Algebra, parte maggiore dell'aritmetica, divisa in tre libri*" dans lequel il présente des nombres de la forme $a+b\sqrt{-1}$ et poursuit les travaux de *Cardan* sur la recherche de solutions non réelles pour des équations du troisième degré.
A cette époque, on sait manipuler les racines carrées d'entiers négatifs mais on ne les considère pas comme des nombres. Lorsqu'une solution d'équation possède une telle racine, elle est dite imaginaire.
La notation *i* apparaît en 1777 siècle avec *Leonhard Euler* (1707 ; 1783) qui développe la théorie des nombres complexes sans encore les considérer comme de « vrais » nombres. Il les qualifie de nombres impossibles ou de nombres imaginaires.
Au XIXe siècle, *Gauss* puis *Hamilton* posent les structures de l'ensemble des nombres complexes. Les nombres sans partie imaginaire sont un cas particulier de ces nouveaux nombres. On les qualifie de « réel » car proche de la vie. Les complexes sont encore considérés comme une création de l'esprit.

Partie 1 : L'ensemble $\mathbb{C}$

1) Définition

Définition : Il existe un ensemble de nombres, noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes** qui possède les propriétés suivantes :
- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$.
- Dans $\mathbb{C}$, on définit une addition et une multiplication qui suivent les mêmes règles de calcul que dans $\mathbb{R}$.
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre *i* tel que $i^2=-1$.
- Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z=a+ib$ avec a et b réels.

Exemples :
$3+4i$; $-2-i$; $\frac{i}{3}$ sont des nombres complexes. Et les nombres réels 0, -2 ou $\sqrt{3}$ sont également des nombres complexes !

Vocabulaire :
- L'écriture $a+ib$ d'un nombre complexe z est appelée la **forme algébrique** de z.
- Le nombre a s'appelle la **partie réelle** et la nombre b s'appelle la **partie imaginaire**. On note : $Re(z)=a$ et $Im(z)=b$.

Remarques :
- Si $b=0$ alors z est un nombre réel.
- Si $a=0$ alors z est un nombre imaginaire pur.

Méthode : Effectuer des calculs sur les nombres complexes

Vidéo https://youtu.be/-aaSfL2fhTY
Vidéo https://youtu.be/1KQIUqzVGqQ

Simplifier les écritures en exprimant le résultat sous la forme algébrique.

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$ $\quad z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$ $\quad z_3 = (2 - 3i)^2$

$z_4 = (2i)^{13}$ $\quad z_5 = \dfrac{1}{4 - 2i}$ $\quad z_6 = \dfrac{1 + i}{2 - i}$

Correction

$z_1 = 3 - 5i - (3i - 4)$
$= 3 - 5i - 3i + 4$
$= 7 - 8i$

$z_2 = (3 - 2i)(-1 + 5i)$
$= -3 + 15i + 2i - 10i^2$
$= -3 + 15i + 2i + 10$
$= 7 + 17i$

$z_3 = (2 - 3i)^2$
$= 4 - 12i + 9i^2$
$= 4 - 12i - 9$
$= -5 - 12i$

$z_4 = (2i)^{13}$
$= 2^{13} i^{13}$
$= 8\,192 \times (i^2)^6 \times i$
$= 8\,192 \times (-1)^6 \times i$
$= 8\,192\, i$

$$z_5 = \frac{1}{4 - 2i} = \frac{4 + 2i}{(4 - 2i)(4 + 2i)} = \frac{4 + 2i}{16 - 4i^2} = \frac{4 + 2i}{16 + 4} = \frac{4 + 2i}{20} = \frac{1}{5} + \frac{1}{10}i$$

$$z_6 = \frac{1 + i}{2 - i} = \frac{(1 + i)(2 + i)}{(2 - i)(2 + i)} = \frac{2 + i + 2i - 1}{4 - i^2} = \frac{1 + 3i}{4 + 1} = \frac{1 + 3i}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

Propriétés :
a) Deux nombres complexes sont égaux, si et seulement si, ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.
b) Un nombre complexe est nul, si et seulement si, sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Démonstration :
Conséquence immédiate de l'unicité de la forme algébrique.

Partie 2 : Conjugué d'un nombre complexe

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **nombre complexe conjugué** de z, le nombre, noté $\bar{z}$, égal à $a - ib$.

Exemples :
- $z = 4 + 5i$ et $\bar{z} = 4 - 5i$
- On peut également noter :
$\overline{7 - 3i} = 7 + 3i$; $\bar{i} = -i$; $\bar{5} = 5$

Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes et n entier naturel non nul.

a) $\bar{\bar{z}} = z$ b) $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$ c) $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

d) $\overline{z^n} = \bar{z}^n$ e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ avec $z \neq 0$ f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$ avec $z' \neq 0$

Démonstrations (dont c, d et e) :

On pose $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ avec a, b, a' et b' réels.
a) $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a + ib}} = \overline{a - ib} = a + ib = z$

b) $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + a' + ib'}$
$= \overline{a + a' + i(b + b')}$
$= a + a' - i(b + b')$
$= a - ib + a' - ib'$
$= \overline{a + ib} + \overline{a' + ib'}$
$= \bar{z} + \overline{z'}$

c) $\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib) \times (a' + ib')}$
$= \overline{aa' + iab' + iba' + i^2bb'}$
$= \overline{aa' - bb' + i(ab' + ba')}$
$= aa' - bb' - i(ab' + ba')$

$\bar{z} \times \overline{z'} = \left(\overline{a + ib}\right) \times \left(\overline{a' + ib'}\right)$
$= (a - ib) \times (a' - ib')$
$= aa' - iab' - iba' + i^2bb'$
$= aa' - bb' - i(ab' + ba')$

Donc : $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$

d) On procède par récurrence.
- Initialisation pour $n = 2$ (trivial pour $n = 1$) : $\overline{z^2} = \overline{z \times z} = \bar{z} \times \bar{z} = \bar{z}^2$, d'après la propriété c.
- Hérédité :
  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie : $\overline{z^k} = \bar{z}^k$.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k + 1$: $\overline{z^{k+1}} = \bar{z}^{k+1}$.
  $\overline{z^{k+1}} = \overline{z^k \times z}$
  $= \overline{z^k} \times \bar{z}$, d'après la propriété c.
  $= \bar{z}^k \times \bar{z}$, par hypothèse de récurrence.
  $= \bar{z}^{k+1}$
- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit : $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.

e) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{1}{a+ib}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)}\right)} = \overline{\left(\frac{a-ib}{a^2+b^2}\right)} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}i}$

$= \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$

$\frac{1}{\bar{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{a+ib}{(a-ib)(a+ib)} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{a}{a^2+b^2} + \frac{b}{a^2+b^2}i$

Donc : $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$

f) $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \overline{\left(z \times \frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \bar{z} \times \frac{1}{\overline{z'}} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}}$

Propriétés :
a) z est réel $\Leftrightarrow z = \bar{z}$ b) z est imaginaire pur $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

Démonstrations :

$z = \bar{z}$	$z = -\bar{z}$
$\Leftrightarrow a + ib = a - ib$	$\Leftrightarrow a + ib = -a + ib$
$\Leftrightarrow 2ib = 0$	$\Leftrightarrow 2a = 0$
$\Leftrightarrow b = 0$	$\Leftrightarrow a = 0$

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe alors $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

Démonstration :
$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2$

Méthode : Déterminer un conjugué

Vidéo https://youtu.be/WhKHo9YwafE

Déterminer le conjugué des nombres suivants et exprimer le résultat sous la forme algébrique.

$$z_1 = (2 - i)(i - 5) \qquad z_2 = \frac{3 + 2i}{i}$$

Correction

$\overline{z_1} = \overline{(2 - i)(i - 5)}$	$\overline{z_2} = \overline{\left(\frac{3 + 2i}{i}\right)}$
$= \overline{(2 - i)} \times \overline{(i - 5)}$	$= \frac{\overline{3 + 2i}}{\bar{i}}$
$= (2 + i)(-i - 5)$	$= \frac{3 - 2i}{-i}$
$= -2i - 10 - i^2 - 5i$	$= \frac{(3 - 2i)i}{-i^2}$

$= -2i - 10 + 1 - 5i$ $\qquad\qquad = \dfrac{(3-2i)i}{1}$

$= -9 - 7i$ $\qquad\qquad = 2 + 3i$

Méthode : Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

Vidéo https://youtu.be/qu7zGL5y4vI

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $3z - 6 = 4i + z$ b) $3z - 2 = \bar{z} + 1$

Correction

a) $3z - 6 = 4i + z$

$3z - z = 6 + 4i$

$2z = 6 + 4i$

$z = 3 + 2i$

b) On pose : $z = a + ib$. L'équation s'écrit alors :

$3(a + ib) - 2 = a - ib + 1$

$3a + 3ib - 2 - a + ib - 1 = 0$

$2a - 3 + 4ib = 0$

Donc : $2a - 3 = 0$ et $4b = 0$

Soit : $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = 0$

D'où : $z = \dfrac{3}{2}$

Partie 3 : Formule du binôme de Newton

Théorème : Formule du binôme

Pour tous nombres complexes a et b et pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Remarque : Les coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \dots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$ s'obtiennent à l'aide du triangle de Pascal.

Démonstration :

On procède par récurrence.

- Initialisation : Pour $n = 1$: $(a+b)^1 = a + b$ et $\binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1 = a + b$
- Hérédité :

  - Hypothèse de récurrence :

  Supposons qu'il existe un entier non nul k tel que la propriété soit vraie :

$$(a+b)^k = \binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \cdots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k$$

  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang $k+1$:

$$(a+b)^{k+1}$$
$$= \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \cdots + \binom{k+1}{k}ab^k + \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

$$(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$$
$$= (a+b)\left(\binom{k}{0}a^k + \binom{k}{1}a^{k-1}b + \binom{k}{2}a^{k-2}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^{k-1} + \binom{k}{k}b^k\right)$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \binom{k}{1}a^k b + \binom{k}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k}{k-1}a^2b^{k-1} + \binom{k}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k}{0}a^k b + \binom{k}{1}a^{k-1}b^2 + \binom{k}{2}a^{k-2}b^3 + \dots + \binom{k}{k-1}ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$
$$= \binom{k}{0}a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \dots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + \binom{k}{k}b^{k+1}$$

Or, $\binom{k}{0} = 1$ et $\binom{k}{k} = 1$

Donc :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \left[\binom{k}{1} + \binom{k}{0}\right]a^k b + \left[\binom{k}{2} + \binom{k}{1}\right]a^{k-1}b^2 + \dots$$
$$+ \left[\binom{k}{k} + \binom{k}{k-1}\right]ab^k + b^{k+1}$$

Et, d'après la formule de Pascal, on a :

$$(a+b)^{k+1} = a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k + b^{k+1}$$
$$(a+b)^{k+1} = \binom{k+1}{0}a^{k+1} + \binom{k+1}{1}a^k b + \binom{k+1}{2}a^{k-1}b^2 + \dots + \binom{k+1}{k}ab^k$$
$$+ \binom{k+1}{k+1}b^{k+1}$$

Car $\binom{k+1}{0} = 1$ et $\binom{k+1}{k+1} = 1$

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 1$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel non nul n.

Méthode : Appliquer la formule du binôme

Vidéo https://youtu.be/UsYH9PvppPo

Développer l'expression $(z+5)^6$.

Correction

$(z+5)^6$

$$= \binom{6}{0}z^6 + \binom{6}{1}z^5 \times 5 + \binom{6}{2}z^4 \times 5^2 + \binom{6}{3}z^3 \times 5^3 + \binom{6}{4}z^2 \times 5^4 + \binom{6}{5}z \times 5^5 + \binom{6}{6}5^6$$

On construit un triangle de Pascal :

k \ n	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

On lit les coefficients sur la dernière ligne du tableau.
$(z+5)^6 = 1z^6 + 6z^5 \times 5 + 15z^4 \times 5^2 + 20z^3 \times 5^3 + 15z^2 \times 5^4 + 6z \times 5^5 + 1 \times 5^6$

Soit : $(z+5)^6 = z^6 + 30z^5 + 375z^4 + 2\,500z^3 + 9\,375z^2 + 18\,750z + 15\,625$

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O;\ \vec{u}, \vec{v})$.

Partie 4 : Représentation dans le plan complexe

1) Définitions

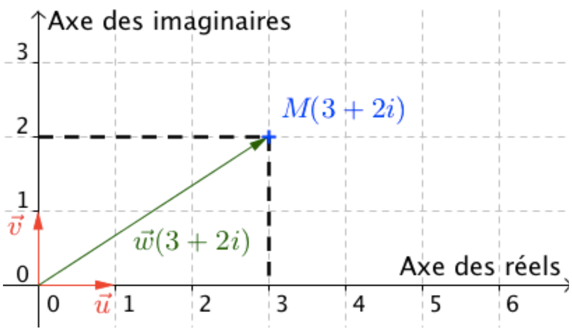
Définitions : a et b sont deux nombres réels.
- À tout nombre complexe $z = a + ib$, on associe son **image**, le point M de coordonnées $\binom{a}{b}$ et tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $\binom{a}{b}$.
- À tout point $M\binom{a}{b}$ et à tout vecteur $\vec{w}\binom{a}{b}$, on associe le nombre complexe $z = a + ib$ appelé **affixe** du point M et **affixe** du vecteur $\vec{w}$.

On note $M(z)$ et $\vec{w}(z)$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/D_yFqcCy3iE

Le point $M\binom{3}{2}$ a pour affixe le nombre complexe $z = 3 + 2i$.
De même, le vecteur $\vec{w}$ a pour affixe $z = 3 + 2i$.



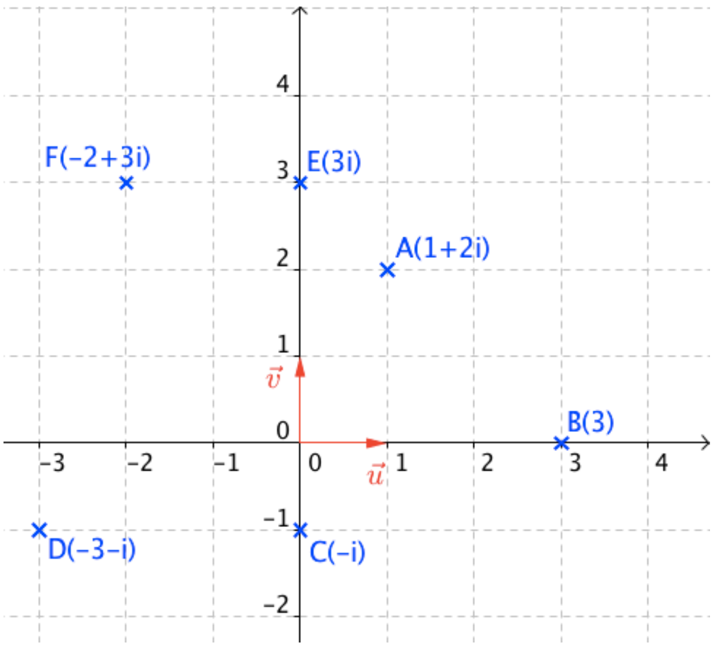
2) Propriétés

Propriétés : $M(z_M)$ et $N(z_N)$ sont deux points du plan.
$\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$ sont deux vecteurs du plan.
a) Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour affixe $z_N - z_M$.
b) Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour affixe $z + z'$.
c) Le vecteur $k\vec{u}$, k réel, a pour affixe kz.
d) Le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $z_I = \frac{z_M+z_N}{2}$

Démonstrations :
a) On pose : $M\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \end{pmatrix}$ et $N\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \end{pmatrix}$.
Le vecteur $\overrightarrow{MN}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_N - x_M \\ y_N - y_M \end{pmatrix}$ donc son affixe est égal à :
$(x_N - x_M) + i(y_N - y_M) = x_N + iy_N - (x_M + iy_M) = z_N - z_M$.

b) c) et d) : Démonstrations analogues en passant par les coordonnées des vecteurs.

Autres exemples :



Méthode : Utiliser l'affixe d'un point en géométrie

Vidéo https://youtu.be/m9yM6kw1ZzU

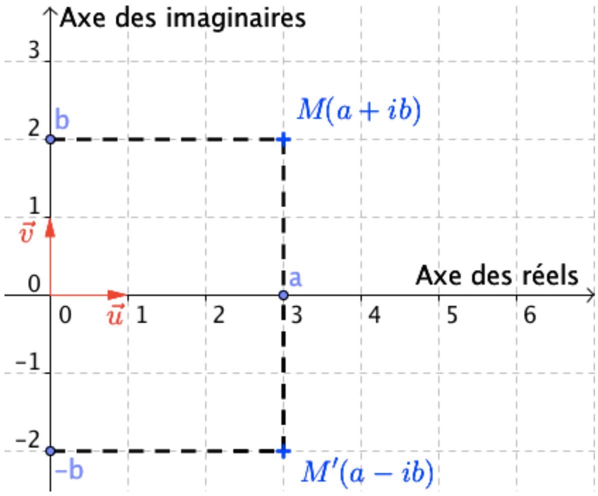
On considère les points $A(-2+3i)$, $B(2+4i)$, $C(5+3i)$, $D(1+2i)$ et $E(-7)$.
a) Démontrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme. Calculer l'affixe de son centre.
b) Les points D, C et E sont-ils alignés ?

Correction
a) - On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
Affixe de $\overrightarrow{AB}$: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + 4i - (-2 + 3i) = 4 + i$
Affixe de $\overrightarrow{DC}$: $z_{\overrightarrow{DC}} = z_C - z_D = 5 + 3i - (1 + 2i) = 4 + i$
Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et donc $ABCD$ est un parallélogramme.

- Le centre du parallélogramme est le milieu I du segment $[AC]$. Son affixe est :
$$z_I = \frac{z_A + z_C}{2} = \frac{-2 + 3i + 5 + 3i}{2} = \frac{3 + 6i}{2} = \frac{3}{2} + 3i$$
b) On va démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires.
Affixe de $\overrightarrow{DC}$: $z_{\overrightarrow{DC}} = 4 + i$
Affixe de $\overrightarrow{DE}$: $z_{\overrightarrow{DE}} = z_E - z_D = -7 - (1 + 2i) = -8 - 2i$.
Donc : $z_{\overrightarrow{DE}} = -2\, z_{\overrightarrow{DC}}$ et donc $\overrightarrow{DE} = -2\,\overrightarrow{DC}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et donc les points D, C et E sont alignés.

3) Image d'un conjugué

Remarque :
Les images M et M' de z et $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe des réels.

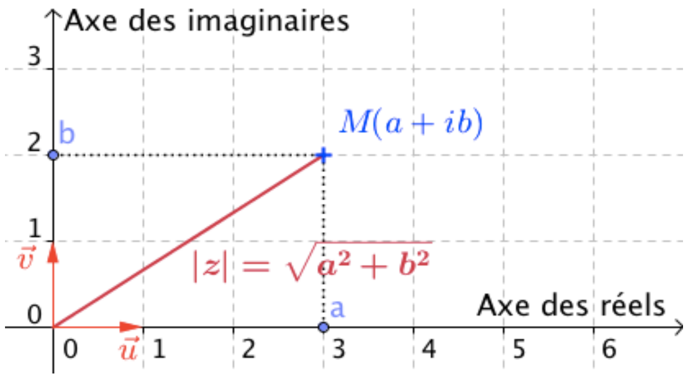


Partie 5 : Module et argument d'un nombre complexe

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle **module** de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2 + b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



<u>Propriétés :</u> Soit z un nombre complexe.

a) $|z|^2 = z\bar{z}$ b) $|\bar{z}| = |z|$ c) $|-z| = |z|$

<u>Démonstrations :</u>

a) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

<u>Propriétés :</u> Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert\lvert z'\rvert$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$
Inverse	$\left\lvert\frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$
Quotient	$\left\lvert\frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$

<u>Démonstrations :</u>

- <u>Module d'un produit :</u>

$|zz'|^2 = zz' \times \overline{zz'} = zz' \times \bar{z}\,\bar{z'} = z \times \bar{z} \times z' \times \bar{z'} = |z|^2 \times |z'|^2 = (|z| \times |z'|)^2$.

Comme $|z|$, $|z'|$ et $|zz'|$ sont positifs, on a : $|zz'| = |z||z'|$

- <u>Module d'une puissance :</u>

On procède par récurrence.

- Initialisation pour $n = 2$ (trivial pour $n = 1$) : $|z^2| = |z \times z| = |z| \times |z| = |z|^2$, d'après la propriété du produit.
- <u>Hérédité :</u>

  - <u>Hypothèse de récurrence :</u>

  Supposons qu'il existe un entier $k > 1$ tel que la propriété soit vraie :

$|z^k| = |z|^k$.

  - <u>Démontrons que :</u> La propriété est vraie au rang $k+1$: $|z^{k+1}| = |z|^{k+1}$.

  $|z^{k+1}| = |z^k z|$

  $= |z^k||z|$, d'après la propriété du produit.

  $= |z|^k|z|$, par hypothèse de récurrence.

  $= |z|^{k+1}$

- <u>Conclusion :</u>

La propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n non nul, soit : $|z^n| = |z|^n$.

<u>Méthode :</u> Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Vidéo https://youtu.be/i85d2fKv34w

Calculer : a) $|3-2i|$ b) $|\overline{-3i}|$ c) $|\sqrt{2}+i|$ d) $\left|\frac{-3i}{\left(\sqrt{2}+i\right)^2}\right|$

Correction

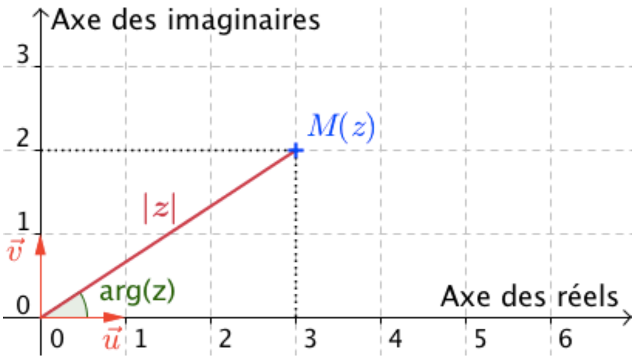
a) $|3-2i| = \sqrt{3^2+(-2)^2} = \sqrt{13}$ b) $|\overline{-3i}| = |-3i| = |-3||i| = 3 \times 1 = 3$

c) $|\sqrt{2}+i| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + 1^2} = \sqrt{3}$

d) $\left|\dfrac{-3i}{(\sqrt{2}+i)^2}\right| = \dfrac{|-3i|}{|(\sqrt{2}+i)^2|} = \dfrac{|-3i|}{|\sqrt{2}+i|^2} = \dfrac{3}{\sqrt{3}^2} = 1$

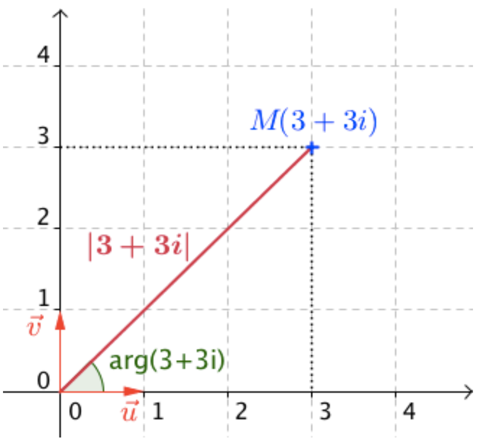
2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle **argument** de z, noté $arg(z)$ une mesure, en radians, de l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$.



Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $arg(z) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.
On notera $arg(z)$ modulo 2π ou $arg(z)\ [2\pi]$
- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM})$ n'est pas défini.

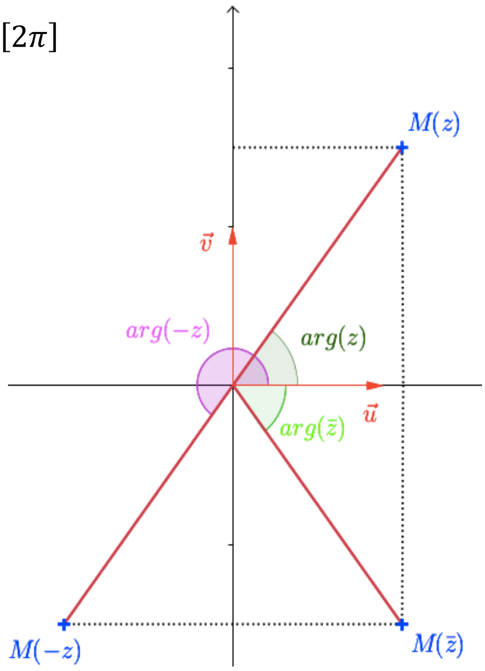
Exemple :



Soit $z = 3 + 3i$.
Alors $|z| = |3+3i| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$$arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.
a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow arg(z) = 0[\pi]$.
b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow arg(z) = \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.
c) $arg(\bar{z}) = -arg(z)$
d) $arg(-z) = arg(z) + \pi$



Démonstrations :
a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
c) d) Ces résultats se déduisent par symétrie.

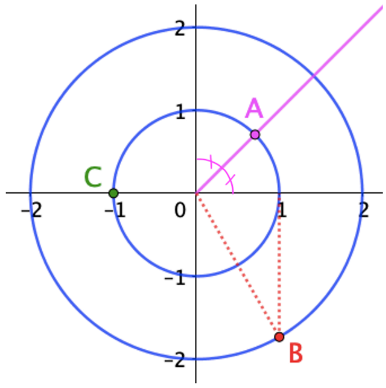
Méthode : Déterminer géométriquement un argument

Vidéo https://youtu.be/NX3pzPL2gwc

a) Déterminer un argument de chaque affixe des points A, B et C.
b) Placer les points D et E d'affixes respectives z_D et z_E telles que :

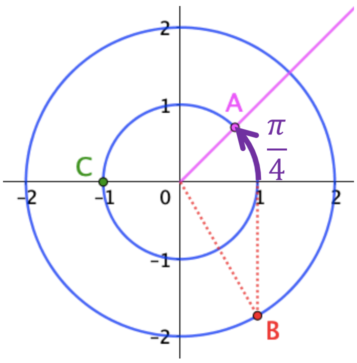
$|z_D| = 2$ et $\arg(z_D) = -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$.

$|z_E| = 3$ et $\arg(z_E) = \frac{3\pi}{4}[2\pi]$.

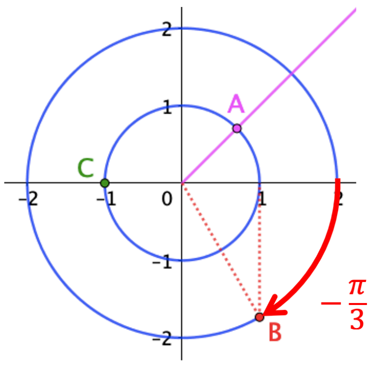


Correction

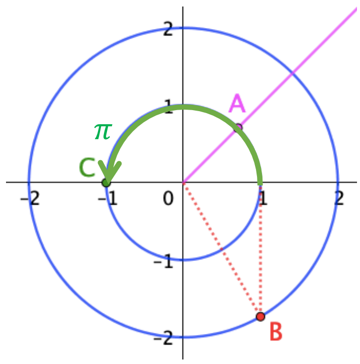
a) $\arg(z_A) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$



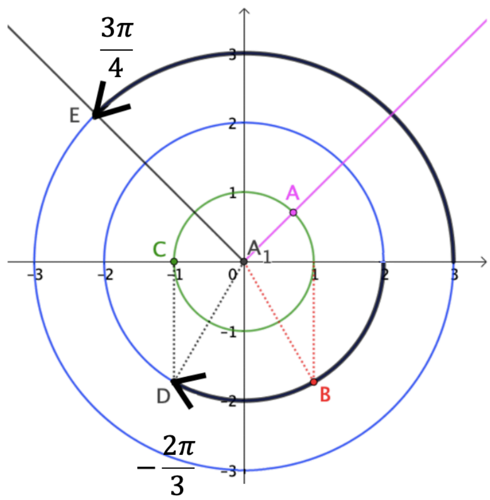
$\arg(z_B) = -\frac{\pi}{3}[2\pi]$



$\arg(z_C) = \pi[2\pi]$



b) Le point D appartient au cercle de rayon 2 car $|z_D| = 2$.
Le point E appartient au cercle de rayon 3 car $|z_E| = 3$.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.	
Produit	$arg(zz') = arg(z) + arg(z')$
Puissance	$arg(z^n) = n\,arg(z)$
Inverse	$arg\left(\frac{1}{z}\right) = -arg\ (z)$
Quotient	$arg\left(\frac{z}{z'}\right) = arg\ (z) - arg\ (z')$

Partie 6 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe

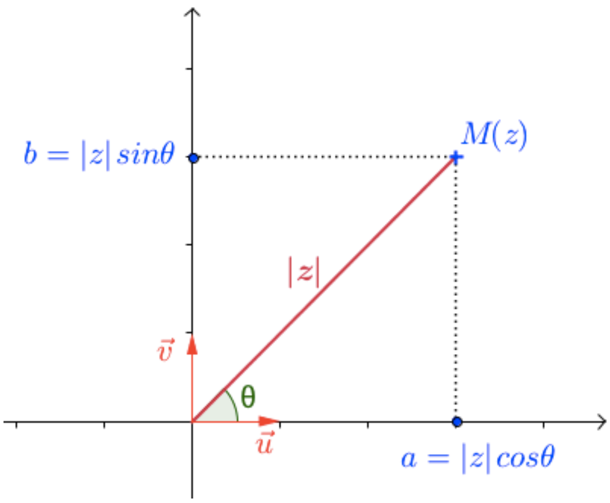
1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = arg\ (z)$
On a alors : $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.

En effet, en considérant le triangle rectangle, on a :

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|}$$

$$\sin\theta = \frac{b}{|z|}$$



Définition : On appelle **forme trigonométrique** d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = arg\ (z)$.

Méthode : Passer de la forme trigonométrique à la forme algébrique et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/kmb3-hNiBq8
Vidéo https://youtu.be/zIbpXlgISc4
Vidéo https://youtu.be/RqRQ2m-9Uhw

1) Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

$a)\ z_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) \quad b)\ z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

$a)\ z_3 = -5i \qquad c)\ z_4 = \sqrt{3} + i$

Correction

1) $a)\ z_1 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i \times 0) = -3.$

$b)\ z_2 = \sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \times \left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2) $a)\ |z_3| = |-5i| = 5$
Géométriquement (cercle trigo), on peut affirmer que : $\arg(z_3) = -\frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.
Donc : $z_3 = 5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

$b)$ - On commence par calculer le module de z_4 :

$$|z_4| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

- En calculant $\frac{z_4}{|z_4|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z_4 et sa partie imaginaire :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_4 tel que :

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad et \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{6}$ convient, en effet :

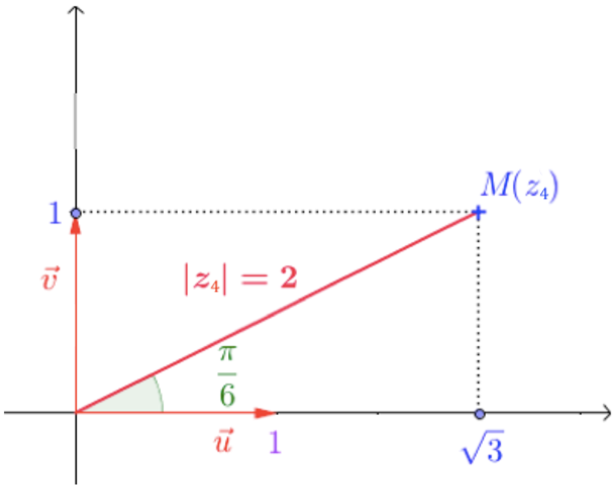
$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

On a ainsi :

$$\frac{z_4}{|z_4|} = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$$

Et donc :

$$z_4 = |z_4|\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$



Partie 7 : Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1

1) Cercle trigonométrique

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1, qui se représente géométriquement par le cercle trigonométrique.

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe appartenant à $\mathbb{U}$.
On a alors $a^2 + b^2 = 1$.

2) Stabilité de $\mathbb{U}$

Méthode : Prouver que $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse

Vidéo https://youtu.be/XTNKoNfFopw

Soit z et z' deux nombres complexes appartenant à $\mathbb{U}$.

Démontrer que zz' et $\frac{1}{z}$ appartiennent à $\mathbb{U}$.

Correction

- $|zz'| = |z||z'|$

$= 1 \times 1$ car z et z' appartiennent à $\mathbb{U}$.

$= 1$

Donc le produit zz' a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par produit.

- $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$

$= \frac{1}{1}$ car z appartient à $\mathbb{U}$.

$= 1$

Donc l'inverse $\frac{1}{z}$ a pour module 1 et appartient donc à $\mathbb{U}$.
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par passage à l'inverse.

Partie 8 : Formules de trigonométrie

1) Formules d'addition

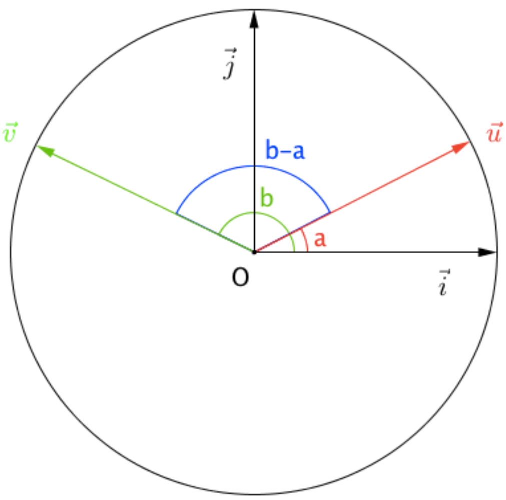
Propriété : Soit a et b deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstrations :

- 1ère formule :

On considère un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O.
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que :
$(\vec{\imath}\,;\vec{u}) = a$ et $(\vec{\imath}\,;\vec{v}) = b$.



On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.
Ainsi : $\vec{u}.\vec{v} = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.
On a également :
$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$
$= 1 \times 1 \times \cos(b-a) = \cos(a-b)$

D'où : $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

- 2e formule :
$\cos(a+b)=\cos\big(a-(-b)\big)=\cos a\cos(-b)+\sin a\sin(-b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

- 3e formule :

$$\begin{aligned}\sin(a-b)&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-(a-b)\right)\\&=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b\\&=\sin a\cos b-\cos a\sin b\end{aligned}$$

- 4e formule :
$\sin(a+b)=\sin\big(a-(-b)\big)=\sin a\cos(-b)-\cos a\sin(-b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

Vidéo https://youtu.be/WcTWAazcXds

Calculer : $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

Correction

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{12}&=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin\frac{5\pi}{12}&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\&=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{aligned}$$

2) Formules de duplication

Propriété : Soit a un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\cos a\sin a$$

Démonstrations :
Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où $a=b$:
$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$
$\sin(2a)=2\cos a\sin a$

On a également : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ donc :
$\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^2 a-(1-\cos^2 a)=2\cos^2 a-1$
Et :
$\cos^2 a-\sin^2 a=1-\sin^2 a-\sin^2 a=1-2\sin^2 a$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

Vidéo https://youtu.be/RPtAUl3oLco

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Correction

$\cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$

Donc :

$\cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et donc :

$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}}$

car $\cos\frac{\pi}{8}$ est positif.

$\sin^2\frac{\pi}{8} = 1-\cos^2\frac{\pi}{8} = 1-\frac{2+\sqrt{2}}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

et donc :

$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$

car $\sin\frac{\pi}{8}$ est positif.

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/yx3yULqR_wI

Résoudre dans $[0\,;2\pi]$ l'équation $\cos(2x) = \sin x$.

Correction

$\cos(2x) = \sin x$ soit $1-2\sin^2 x = \sin x$ d'après une formule de duplication.
On pose $X = \sin x$, l'équation s'écrit alors : $1-2X^2 = X$
Soit : $2X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4\times 2\times(-1) = 9$
L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \qquad et \qquad X_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

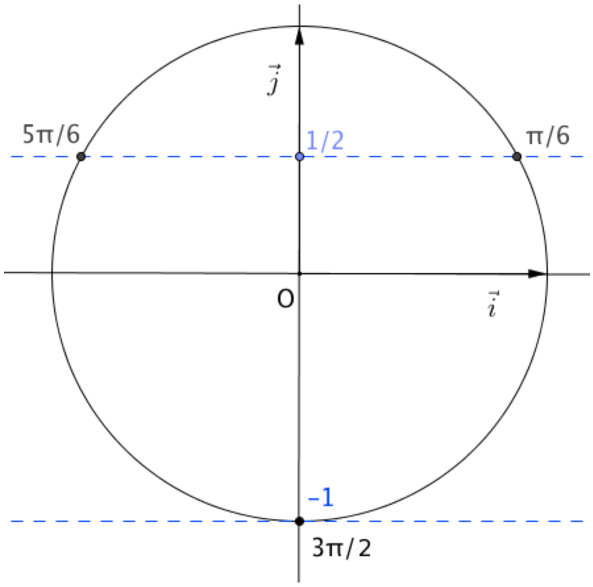
Résolvons alors dans $[0\,;2\pi]$ les équations : $\sin x = \frac{1}{2}$ et $\sin x = -1$:

$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \quad ou \quad x = \frac{5\pi}{6}$

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

Ainsi :

$S = \left\{\frac{\pi}{6} \,;\, \frac{5\pi}{6} \,;\, \frac{3\pi}{2}\right\}$



Partie 9 : Forme exponentielle d'un nombre complexe

1) Définition

Posons $f(\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$.
On prend $|z| = |z'| = 1$ et on a vu dans le chapitre 2/3 que :
$\arg(zz') = \arg z + \arg(z')$, soit :
$(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta' + i\sin\theta') = \cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')$
Soit : $f(\theta)f(\theta') = f(\theta + \theta')$.
On retrouve ainsi la même équation fonctionnelle que celle établie pour les exponentielles :
$e^{\theta}e^{\theta'} = e^{\theta+\theta'}$.

Définition : Pour tout réel θ, on a : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$.

Remarque :
$e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ.

Propriété : $e^{i\pi} = -1$

Démonstration :
$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + i \times 0 = -1$

Cette relation a été établie en 1748 par le mathématicien suisse *Leonhard Euler* (1707 ; 1783). Elle possède la particularité de relier les grandes branches des mathématiques : l'analyse (avec le nombre *e*), l'algèbre (avec le nombre *i*) et la géométrie (avec le nombre π).

Exemples :
$e^{i0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \times 0 = 1$

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i \times 1 = i$$

Définition : Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous sa **forme exponentielle** $z = re^{i\theta}$.

Méthode : Passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et réciproquement

Vidéo https://youtu.be/WSW6DIbCS_0
Vidéo https://youtu.be/tEKJVKKQazA
Vidéo https://youtu.be/zdxRt5poJp0

1) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme exponentielle :

a) $z_1 = -2i$ b) $z_2 = -3$ c) $z_3 = \sqrt{3} - 3i$

2) Écrire les nombres complexes suivants sous la forme algébrique :

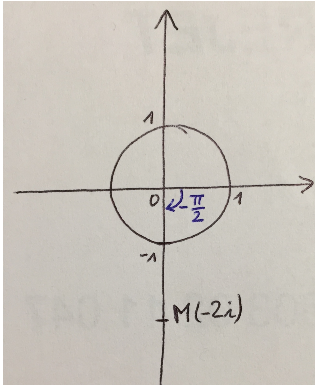
a) $z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ b) $z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$

Correction

1) a) - $|z_1| = |-2i| = |-2| \times |i| = 2 \times 1 = 2$

- Pour déterminer un argument de z_1, on peut utiliser le cercle trigonométrique.

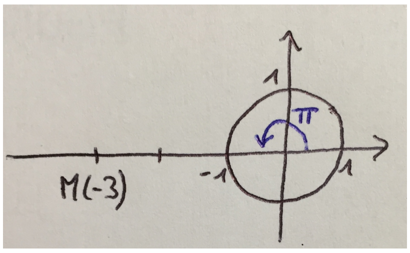
On fait un petit schéma à main levée en plaçant le point M d'affixe z_1 et on lit graphiquement qu'un argument de z_1 est $-\frac{\pi}{2}$.



Ainsi, on a : $z_1 = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$.

b) - $|z_2| = |-3| = 3$

- On place le point M d'affixe z_2 et on lit graphiquement qu'un argument de z_2 est π.



Ainsi, on a : $z_2 = 3e^{i\pi}$.

c) $|z_3| = |\sqrt{3} - 3i| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-3)^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

- Il n'est pas évident de déterminer graphiquement un argument de z_3. La méthode consiste alors à calculer $\frac{z_3}{|z_3|}$:

$$\frac{z_3}{|z_3|} = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} - \frac{3i}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{3i \times \sqrt{3}}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

On cherche donc un argument θ de z_3 tel que :

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Comme, on a :

$$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad et \qquad \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

L'argument $\theta = -\frac{\pi}{3}$ convient. Et ainsi :

$\frac{z_3}{|z_3|} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

Soit :

$z_3 = |z_3|\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) $a)\ z_4 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

$b)\ z_5 = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2} + 2i\sqrt{2}$

2) Propriétés

Propriétés : Pour tous réels θ et θ',

a) $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$ b) $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ c) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$ d) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

Méthode : Appliquer la notation exponentielle

Vidéo https://youtu.be/8EVfyqyVBKc

1) Déterminer la forme exponentielle de $z = 1 + i\sqrt{3}$.
2) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

a) iz b) $i\bar{z}$ c) $-\frac{2i}{z}$

Correction

1) $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) a) $iz = 2ie^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

b) $i\bar{z} = 2ie^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

c) $-\frac{2i}{z} = \frac{2\times(-i)}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\frac{\pi}{3}}} = e^{i\left(-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)} = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

3) Formules de Moivre et d'Euler

Formule de Moivre : Pour tous réels θ et θ', pour tout entier naturel n non nul :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$$

Que l'on peut également écrire : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

Méthode : Appliquer la formule de Moivre

Vidéo https://youtu.be/RU2C4i3n5Ik

Exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Correction

$\cos(3x) = Re\ (\cos(3x) + i\sin(3x))$

Or, selon la formule de Moivre :

$\cos(3x) + i\sin(3x) = (\cos x + i\sin x)^3$

$= \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x + 3i^2\cos x\sin^2 x + i^3\sin^3 x$, en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit :

$\cos(3x) + i\sin(3x) = \cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x$

$= \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x + i(3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x)$

On en déduit que : $\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\sin^2 x$

Or, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, donc :

$\cos(3x) = \cos^3 x - 3\cos x\,(1 - \cos^2 x)$

$= \cos^3 x - 3\cos x + 3\cos^3 x$

$= 4\cos^3 x - 3\cos x$

Formules d'Euler : Pour tout réel θ:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Méthode : Appliquer les formules d'Euler

Vidéo https://youtu.be/p6TncUjPKfQ

a) Linéariser (*) l'expression $\cos^3 x$.

b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \cos^3 x$.

(*) Linéariser une telle expression consiste à la ramener comme somme d'expressions du type $\cos ax$ et $\sin ax$.

Correction

a) On applique une formule d'Euler :

$$\cos^3 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left(e^{ix}\right)^3 + 3\left(e^{ix}\right)^2 e^{-ix} + 3e^{ix}\left(e^{-ix}\right)^2 + \left(e^{-ix}\right)^3\right),$$

en appliquant la formule du binôme de Newton pour développer.

Soit encore :

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{2ix}e^{-ix} + 3e^{ix}e^{-2ix} + e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}(\cos 3x + i\sin 3x + 3\cos x + 3i\sin x + 3\cos x - 3i\sin x + \cos 3x - i\sin 3x)\\ &= \frac{1}{8}(\cos 3x + 3\cos x + 3\cos x + \cos 3x)\\ &= \frac{1}{8}(2\cos 3x + 6\cos x)\\ &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\end{aligned}$$

b) Ainsi, chercher une primitive de $\cos^3 x$ revient à chercher une primitive de $\frac{1}{4}\left(\cos 3x + 3\cos x\right)$.

Une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)$ est la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}\sin 3x + 3\sin x\right) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

DIVERTISSEMENT

Une démonstration avec les nombres complexes de la célèbre égalité $cos^2(x) + sin^2(x) = 1$.

$cos^2(x) + sin^2(x)$
$= cos^2(x) - i^2\, sin^2(x)$
$= (\cos(x) - i\sin(x))\,(\cos(x) + i\sin(x))$
$= e^{-ix}e^{ix}$
$= e^{-ix+ix}$
$= e^0$
$= 1$

Partie 10 : Applications des nombres complexes à la géométrie

Dans la suite, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$.

Propriété : A, B et C sont trois points deux à deux distincts du plan d'affixes respectives a, b et c. On a : $a)\ AB = |b - a|$ $b)\ \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}\right) = \arg(b - a)$ $c)\ \left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Démonstrations :

a) On considère un point E, d'affixe e tel que $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$.
Alors : $|b - a| = |e - 0| = OE$
Comme $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AB}$, $OE = AB$ donc $|b - a| = AB$.

b) E a pour affixe $e = b - a$.
Donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{OE}) = \arg(b - a)$ et donc $(\vec{u}\,;\overrightarrow{AB}) = \arg(b - a)$.

c) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB}\,;\vec{u}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC})$
$= (\vec{u}\,;\overrightarrow{AC}) - (\vec{u}\,;\overrightarrow{AB})$
$= \arg(c - a) - \arg(b - a)$
$= \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Méthode : Utiliser les nombres complexes en géométrie

Vidéo https://youtu.be/NjLZfbqRFB0

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives $z_A = -2 - i$, $z_B = 1 - 2i$ et $z_C = -1 + 2i$.
a) Démontrer que le triangle ABC est isocèle en A.
b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.

Correction

1) $AB = |z_B - z_A| = |1 - 2i - (-2 - i)| = |3 - i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$
$AC = |z_C - z_A| = |-1 + 2i - (-2 - i)| = |1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$
Donc $AB = AC$, et donc le triangle ABC est isocèle en A.

2) $(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)$

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{1 + 3i}{3 - i}$$
$$= \frac{(1 + 3i)(3 + i)}{(3 - i)(3 + i)}$$
$$= \frac{3 + i + 9i - 3}{9 + 1}$$
$$= \frac{10i}{10} = i$$

$(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$

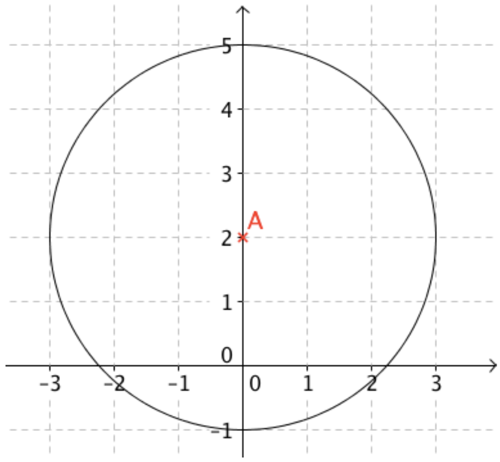
On en déduit que l'angle $\widehat{BAC}$ est droit et donc le triangle ABC est rectangle en A.

Méthode : Déterminer un ensemble de points

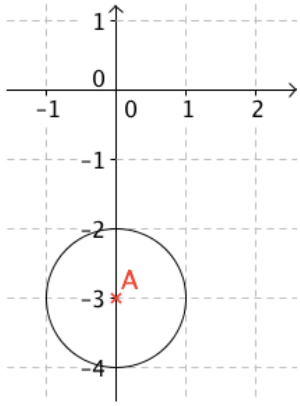
Vidéo https://youtu.be/WTXu19XC9Lw
Vidéo https://youtu.be/5puq7tzMZAo
Vidéo https://youtu.be/r6RO4ifOf70

Soit M un point d'affixe z. Dans chaque cas, déterminer et représenter :
a) L'ensemble des points M tels que $|z-2i|=3$.
b) L'ensemble des points M tels que $|iz-3|=1$.
c) L'ensemble des points M tels que $|\bar{z}-3+i|=|z-5|$.
d) L'ensemble des points M tels que $\frac{|z-i|}{|z|}=2$.
e) L'ensemble des points M tels que $\arg(z)=\frac{\pi}{4}\,[\pi]$.
f) L'ensemble des points M tels que $\arg(z-2+i)=\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$.

Correction
a) Soit A le point d'affixe $2i$ alors $|z-2i|=3$ s'écrit :
$AM=3$. En effet : $|z-2i|=AM$.
L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(2i)$ et de rayon 3.



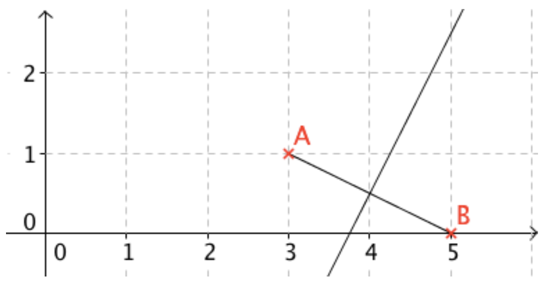
b) $|iz-3|=|i(z+3i)|=|i|\times|z+3i|=|z-(-3i)|$



Soit A le point d'affixe $-3i$ alors $|iz-3|=1$ s'écrit $AM\;=\;1$.
En effet : $|z-(-3i)|=AM$.
L'ensemble des points M est le cercle de centre $A(-3i)$ et de rayon 1.

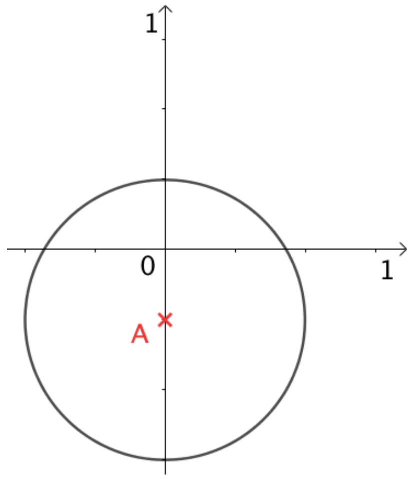
c) $|\bar{z}-3+i|=|\overline{\bar{z}-3+i}|=|\bar{\bar{z}}-3-i|=|z-3-i|=|z-(3+i)|$

Soit A le point d'affixe $3+i$ et B le point d'affixe 5 alors $|\bar{z}-3+i|=|z-5|$ s'écrit $AM=BM$.
L'ensemble des points M est la médiatrice du segment $[AB]$.

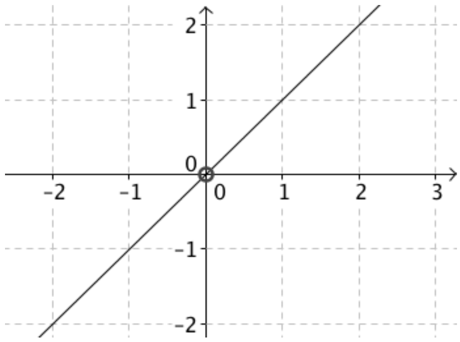


d) $\frac{|z-i|}{|z|}=2$.
Soit $|z-i|=2|z|$, en notant que $z\neq 0$.
Soit encore : $|z-i|^2=4|z|^2$
On pose $z=x+iy$, alors l'équation s'écrit :
$|x+iy-i|^2=4|x+iy|^2$

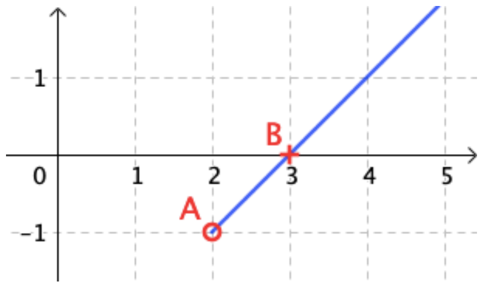
$|x + i(y-1)|^2 = 4|x+iy|^2$
$x^2 + (y-1)^2 = 4(x^2+y^2)$
$x^2 + y^2 - 2y + 1 = 4x^2 + 4y^2$
$3x^2 + 3y^2 + 2y = 1$
$x^2 + y^2 + \frac{2}{3}y = \frac{1}{3}$
$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$
$x^2 + \left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$
L'ensemble des points M est le cercle de centre $A\left(-\frac{i}{3}\right)$ et de rayon $\frac{2}{3}$.



e) L'ensemble des points M est la bissectrice de l'angle formé par l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées privée de l'origine.



f) $\arg(z-2+i) = \arg(z-(2-i))$.
Soit A le point d'affixe $2-i$ alors $\arg(z-2+i) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$ s'écrit : $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right) = \frac{\pi}{4}\,[2\pi]$
En effet, $\arg(z-(2-i)) = \left(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM}\right)$.
L'ensemble des points M est la demi-droite d'origine A privée de A et passant par le point $B(3)$.



Partie 11 : Racine n-ième de l'unité

1) Détermination de l'ensemble $\mathbb{U}_n$

On cherche à déterminer l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'égalité $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition : Une **racine n-ième de l'unité** est un nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Théorème : L'ensemble $\mathbb{U}_n$ des racines n-ième de l'unité possède exactement n racines : $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n-1$.

Démonstration :

Existence :

Si $z^n = 1$ alors $|z|^n = |z^n| = 1$ et donc $|z| = 1$.

On cherche ainsi, les nombres complexes de la forme $z = e^{i\theta}$, avec $\theta \in [0\,;2\pi[$.

Soit : $z^n = 1$

$\left(e^{i\theta}\right)^n = 1$

$e^{in\theta} = 1$

$n\theta = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

$\theta = \frac{2k\pi}{n}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

On peut ainsi restreindre les valeurs prisent par k à l'ensemble des entiers compris entre 0 et $n-1$.

Donc $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, avec k entier compris entre 0 et $n-1$, est une racine n-ième de l'unité.

Unicité :

Supposons qu'il existe k' entier compris entre 0 et $n-1$, tel que $w_k = w_{k'}$.

Alors : $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}}$

$\frac{2k\pi}{n} = \frac{2k'\pi}{n} + 2l\pi$, avec $l \in \mathbb{Z}$.

$2k\pi = 2k'\pi + 2ln\pi$

$k = k' + ln$

$k - k' = ln$

Donc n divise $k - k'$.

Or $k - k'$ est un entier compris entre 0 et $n-1$. Donc n ne peut pas diviser $k - k'$.

Et donc $l = 0$. Soit $k = k'$.

Méthode : Résoudre une équation en utilisant les racines de l'unité

Vidéo https://youtu.be/PZWgjj_7G7c

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $(z-1)^3 = 1$ b) $z^5 = -1$

Correction

a) $(z-1)^3 = 1$

$z - 1$ est une racine 3-ième de l'unité.

On a : $z - 1 = e^{i\frac{2k\pi}{3}}$, avec k entier compris entre 0 et 2.

Soit : $z - 1 = 1$ ou $z - 1 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z - 1 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$

Soit : $z = 2$ ou $z = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ou $z = 1 + e^{i\frac{4\pi}{3}}$

$$S = \left\{2\,;1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}\,;\,1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

b) $z^5 = -1$

$z^5 = (-1)^5$

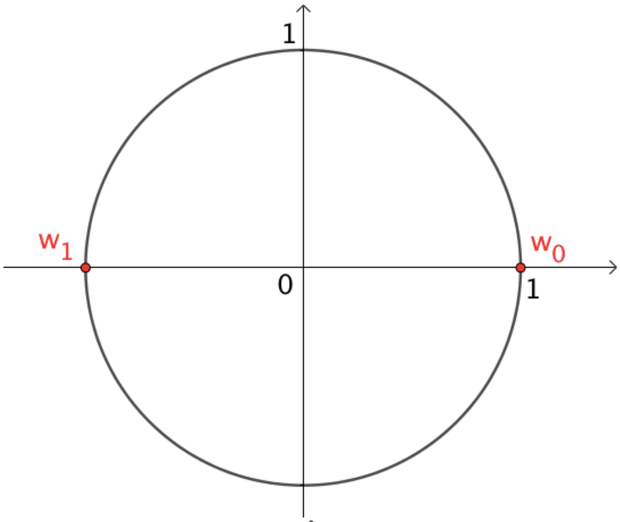
$\left(\frac{z}{-1}\right)^5 = 1$

$(-z)^5 = 1$
$-z$ est une racine 5-ième de l'unité.
On a : $-z = e^{i\frac{2k\pi}{5}}$, avec k entier compris entre 0 et 4.
Soit : $-z = 1$ ou $-z = e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $-z = e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Soit : $z = -1$ ou $z = -e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $z = -e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Soit : $z = -1$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{4\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{6\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\pi}e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Soit : $z = -1$ ou $z = e^{i\frac{7\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{9\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{11\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{13\pi}{5}}$.
Soit : $z = -1$ ou $z = e^{-i\frac{3\pi}{5}}$ ou $z = e^{-i\frac{\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{\pi}{5}}$ ou $z = e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

$$S = \left\{-1\,;e^{-i\frac{3\pi}{5}}\,;\,e^{-i\frac{\pi}{5}}\,;\,e^{i\frac{\pi}{5}}\,;\,e^{i\frac{3\pi}{5}}\right\}.$$

2) Représentation géométrique

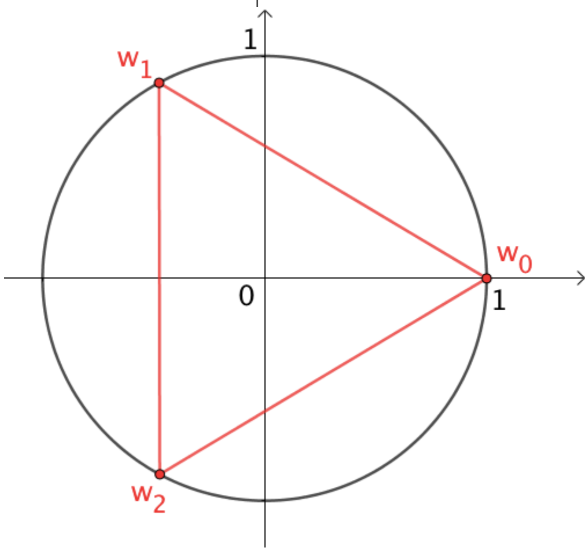
a) Cas $n = 2$:



Si on applique le théorème ci-dessus, les racines de l'équation $z^2 = 1$ sont :
$w_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{2}} = e^{i0} = 1$
$w_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{2}} = e^{i\pi} = -1$

On peut ainsi représenter les racines 2-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique. En effet, on a vu que les racines n-ième de l'unité ont pour module 1.

b) Cas $n = 3$:



Les racines de l'équation $z^3 = 1$ sont :
$w_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{3}} = e^{i0} = 1,\ w_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{3}} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$,
$w_2 = e^{i\frac{2\times2\times\pi}{3}} = e^{\frac{4i\pi}{3}}$

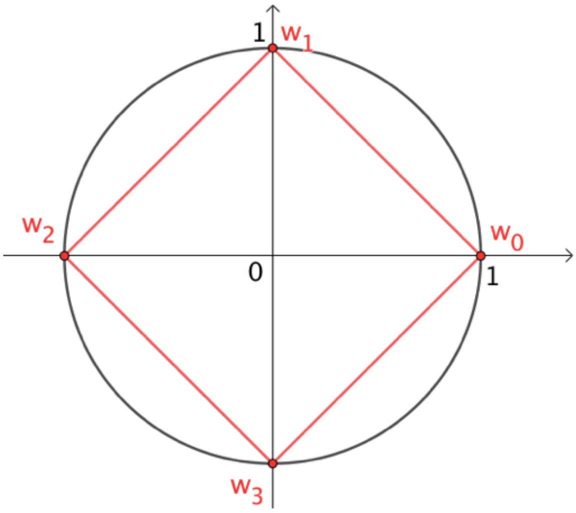
On peut ainsi représenter les racines 3-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.
Par convention, on note habituellement :
$j = w_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et $j^2 = w_2 = e^{\frac{4i\pi}{3}}$.
L'ensemble des points dont les affixes sont les racines 3-ième de l'unité forment un triangle équilatéral.

c) Cas $n = 4$:

Les racines de l'équation $z^4 = 1$ sont :
$w_0 = e^{i\frac{2\times0\times\pi}{4}} = e^{i0} = 1, w_1 = e^{i\frac{2\times1\times\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{2}}, w_2 = e^{i\frac{2\times2\times\pi}{4}} = e^{i\pi} = -1,$

$w_3 = e^{i\frac{2\times3\times\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

On peut ainsi représenter les racines 4-ième de l'unité sur le cercle trigonométrique.
L'ensemble des points dont les affixes sont les racines 4-ième de l'unité forment un carré.



De façon générale, l'ensemble des points dont les affixes sont les racines n-ième de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.

Méthode : Utiliser les racines de l'unité

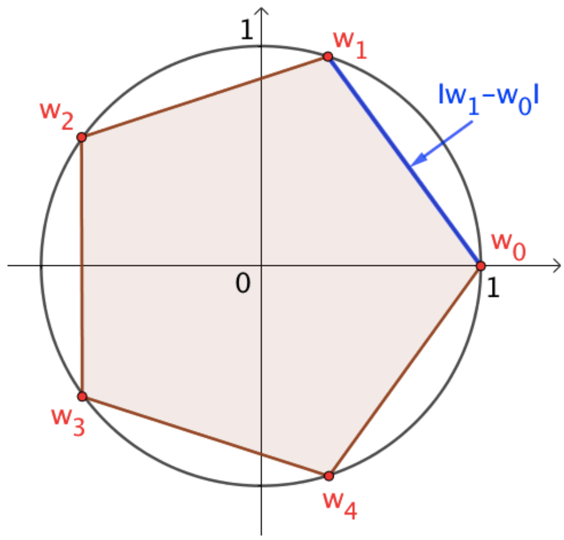
Vidéo https://youtu.be/cqK_IGw_0fE

Démontrer que le périmètre d'un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon 1 est égal à $10\sin\frac{\pi}{5}$.

Correction

Les images des racines 5-ième de l'unité forment un pentagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.
Ainsi pour calculer le périmètre du pentagone, il suffit de calculer la longueur d'un côté du pentagone.
Soit par exemple :

$$\begin{aligned}|w_1 - w_0| &= \left|e^{i\frac{2\times1\times\pi}{5}} - 1\right| \\ &= \left|e^{i\frac{2\pi}{5}} - 1\right| \\ &= \left|e^{i\frac{2\pi}{10}}\right| \times \left|e^{i\frac{2\pi}{10}} - e^{-i\frac{2\pi}{10}}\right| \\ &= \left|e^{i\frac{\pi}{5}} - e^{-i\frac{\pi}{5}}\right|\end{aligned}$$



Soit, en appliquant une formule d'Euler :

$$|w_1 - w_0| = \left|2i \times \sin\frac{\pi}{5}\right| = 2\sin\frac{\pi}{5}$$

On en déduit que le périmètre du pentagone est égal à $10\sin\frac{\pi}{5}$.

Partie 12 : Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Définition : Soit a, b et c des réels avec $a \neq 0$ et z un nombre complexe.
On appelle **discriminant** du trinôme $az^2 + bz + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété :
- Si $\Delta > 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions réelles distinctes :

$$z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Si $\Delta = 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a une unique solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $az^2 + bz + c = 0$ a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Démonstration :
On met le trinôme sous sa forme canonique (Voir cours de la classe de 1ère) :

$$az^2 + bz + c = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

En posant $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$az^2 + bz + c = 0$$
$$\Leftrightarrow a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a} \quad (a \neq 0)$$
$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta > 0$:

$$z + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} \quad ou \quad z + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$$
$$z = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} \quad ou \quad z = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions réelles : $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta = 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

L'équation n'a qu'une seule solution réelle : $z_0 = -\frac{b}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$: L'équation peut s'écrire :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = i^2 \frac{-\Delta}{4a^2} \quad (car\ i^2 = -1)$$

Donc :

$$z+\frac{b}{2a}=i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad ou \quad z+\frac{b}{2a}=-i\sqrt{\frac{-\Delta}{4a^2}} \quad (car\ \frac{-\Delta}{4a^2}>0)$$

$$z=\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a} \quad ou \quad z=-\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}-\frac{b}{2a}$$

L'équation a deux solutions complexes : $z_1=\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Méthode : Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

Vidéo https://youtu.be/KCnorHy5FE4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes : a) $z^2+5=0$ b) $z^2+3z+4=0$

Correction

a) $z^2+5=0$

$z^2=-5$

$z^2=5i^2$

Donc : $z=i\sqrt{5}$ ou $z=-i\sqrt{5}$

Les solutions sont donc $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

b) $z^2+3z+4=0$

On calcule de discriminant Δ du trinôme : $\Delta=3^2-4\times1\times4=-7$

$\Delta<0$ donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1=\frac{-3+i\sqrt{7}}{2}=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{7}}{2}i \quad \text{et} \quad z_2=\frac{-3-i\sqrt{7}}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Propriété : La somme S et le produit P des racines d'un polynôme du second degré de la forme az^2+bz+c sont donnés par : $S=-\frac{b}{a}$ et $P=\frac{c}{a}$.

Exemple :

On a vu dans la méthode précédente que l'équation $z^2+5=0$ possède deux racines : $i\sqrt{5}$ et $-i\sqrt{5}$.

Ainsi : $S=i\sqrt{5}-i\sqrt{5}=0$ et $P=i\sqrt{5}\times\left(-i\sqrt{5}\right)=5$

En appliquant, les formules de la propriété, on retrouve ces résultats :

$$S=-\frac{0}{1}=0 \quad et \quad P=\frac{5}{1}=5.$$

Partie 13 : Équations de degré n dans $\mathbb{C}$

1) Définition

Définition : Une **fonction polynôme** (ou **polynôme**) P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, où $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ ($a_n \neq 0$) sont les **coefficients** réels de P.
L'entier n est appelé le **degré** du polynôme P.

Propriété : Si une fonction polynôme est nulle, alors tous ses coefficients sont nuls.

2) Racine d'un polynôme

Définition : Soit un polynôme P. Un nombre complexe a s'appelle **racine** de P si $P(a) = 0$.

Exemple :
Les nombres complexes i et $-i$ sont les racines du polynôme $z^2 + 1$.

Théorème : Soit un polynôme P définie par $P(z) = z^n - a^n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
Alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$

Démonstration :
- Si $a = 0$: C'est évident.
- Si $a = 1$:
On a : $z(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^n + z^{n-1} + z^{n-2} + \cdots + z^2 + z$
$1(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1$
En soustrayant membre à membre, on a :
$$(z - 1)(z^{n-1} + z^{n-2} + z^{n-3} + \cdots + z + 1) = z^n - 1$$
- Si $a \neq 0$ quelconque :
On remplace z par z/a dans l'égalité ci-dessus :
$$\left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(\frac{z^{n-1}}{a^{n-1}} + \frac{z^{n-2}}{a^{n-2}} + \frac{z^{n-3}}{a^{n-3}} + \cdots + \frac{z}{a} + 1\right) = \frac{z^n}{a^n} - 1$$
Soit en multipliant chaque membre par a^n :
$$(z - a)(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2} z + a^{n-1}) = z^n - a^n$$
Il existe donc un polynôme $Q(z) = z^{n-1} + az^{n-2} + a^2 z^{n-3} + \cdots + a^{n-2} z + a^{n-1}$ de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Corollaire : Soit un polynôme P de degré n. Si a est une racine complexe de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n - 1$, tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Démonstration :
Comme a est une racine complexe de P, on a : $P(a) = 0$.
Donc :
$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n - a_0 - a_1 a - a_2 a^2 - \cdots - a_n a^n \\ &= a_1(z - a) + a_2(z^2 - a^2) + \cdots + a_n(z^n - a^n) \end{aligned}$$

Or, pour tout k compris entre 1 et n, il existe un polynôme Q_{k-1} de degré $k-1$, tel que :
$z^k - a^k = (z-a)Q_{k-1}(z)$.

Donc : $P(z) = a_1(z-a)Q_0(z) + a_2(z-a)Q_1(z) + \cdots + a_n(z-a)Q_{n-1}(z)$
$= (z-a)(a_1Q_0(z) + a_2Q_1(z) + \cdots + a_nQ_{n-1}(z))$

Il existe donc un polynôme Q de degré $n-1$, tel que : $P(z) = (z-a)Q(z)$.

Corollaire : Un polynôme de degré n admet au plus n racines.

Démonstration :
Supposons que les nombres complexes α_1, α_2, …, α_p sont des racines deux à deux distincts du polynôme P.
Alors il existe un polynôme Q_1 tel que : $P(z) = (z-\alpha_1)Q_1(z)$.
Or, $0 = P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1)Q_1(\alpha_2)$ et $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$.
Donc $Q_1(\alpha_2) = 0$.
Ainsi, il existe un polynôme Q_2 tel que : $Q_1(z) = (z-\alpha_2)Q_2(z)$.
Et donc : $P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)Q_2(z)$.
En continuant ainsi avec des polynômes Q_3, Q_4, … Q_p, on obtient :

$$P(z) = (z-\alpha_1)(z-\alpha_2)(z-\alpha_3)\ldots(z-\alpha_p)Q_p(z).$$

On en déduit que le polynôme P est de degré $p + degré(Q_p) \geq p$.

Méthode : Factoriser un polynôme dont une racine est connue

Vidéo https://youtu.be/1Y-Jtl6nNXU

Factoriser dans $\mathbb{C}$ le polynôme : $P(z) = z^3 + z^2 + 4z + 4$.

Correction
P est un polynôme de degré 3, il admet au plus 3 racines.
On cherche une racine évidente de P en testant des valeurs entières « autour de 0 ». On peut tester également i ou $-i$.
Il sera ensuite aisé de déterminer la ou les autres racines qui sont au plus au nombre de 2.
On constate que $z = -1$ est une racine évidente de P :

$$P(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 + 4(-1) + 4 = 0$$

Donc, il existe un polynôme Q de degré 2, tel que : $P(z) = (z+1)Q(z)$.

On a donc :
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)Q(z)$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = (z+1)(az^2 + bz + c)$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + bz^2 + cz + az^2 + bz + c$
$z^3 + z^2 + 4z + 4 = az^3 + (b+a)z^2 + (c+b)z + c$

Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 1 \\ c + b = 4 \\ c = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

On en déduit que : $Q(z) = z^2 + 4$.
Or, il est possible de factoriser Q :

$Q(z) = z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$
En effet : $z^2 + 4 = 0 \iff z = 2i \text{ ou } z = -2i$

On a ainsi : $P(z) = (z + 1)(z - 2i)(z + 2i)$.

Méthode : Résoudre une équation de degré 3 à coefficients réels dont une racine est connue.

Vidéo https://youtu.be/KqghKmQ9gOk

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

Correction
On pose $P(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$.
On voit que $x = 1$ est une racine évidente de P. Donc il existe un polynôme Q, de degré 2, tel que : $P(x) = (x - 1)Q(x)$.

On a donc :
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)Q(x)$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = (x - 1)(ax^2 + bx + c)$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + bx^2 + cx - ax^2 - bx - c$
$x^3 + x^2 - 3x + 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (c - b)x - c$
Ainsi, en procédant par identification, on a :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -3 \\ -c = 1 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

Donc : $P(x) = (x - 1)(x^2 + 2x - 1)$.

L'équation $x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$ peut s'écrire $(x - 1)(x^2 + 2x - 1) = 0$.
Soit : $x - 1 = 0$ ou $x^2 + 2x - 1 = 0$
$x = 1$ $\Delta = 8$

$$x = \frac{-2 - \sqrt{8}}{2} = -1 - \sqrt{2}$$

ou $x = -1 + \sqrt{2}$

$$S = \{-1 - \sqrt{2}\,;\ -1 + \sqrt{2}\,; 1\}$$