COMBINATOIRE ET DÉNOMBREMENT

I. Notion de dénombrement sur un ensemble fini

On dira qu’un ensemble est **fini** lorsqu’il admet un nombre fini d’éléments.  
Le nombre d’éléments de est appelé le **cardinal** de l’ensemble et il est noté :

ou .

Par convention, l’ensemble vide est un ensemble fini de cardinal 0.

**Dénombrer**, c’est compter le nombre d’éléments que contient un ensemble fini, c’est à dire en déterminer le cardinal.

Exemple :

On considère l’ensemble des élèves de votre classe. Alors **…**

*Compléter par le nombre d’élèves de la classe.*

1) Principe additif

Définition : On dit que deux ensembles sont **disjoints** s’ils ont aucun élément en commun.

Propriété : Soit , ensembles finis deux à deux disjoints.

Alors

Exemple :

Soit et

Alors ( et sont disjoints) et on a :

Méthode : Dénombrer en utilisant un diagramme

Dans une classe, deux options sont proposées : latin et théâtre.

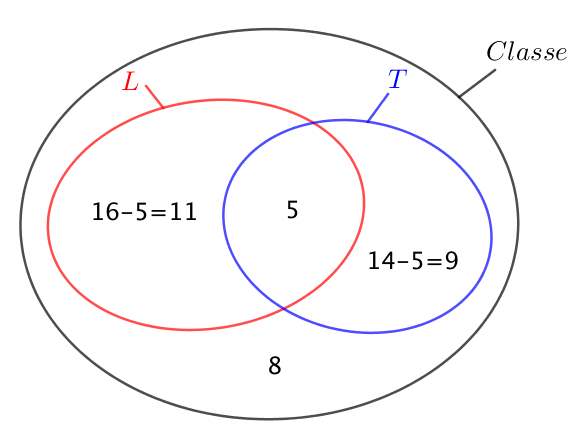
On sait que, 16 élèves pratiquent le latin, 14 le théâtre, 5 pratiquent les deux options et 8 n’en pratiquent aucune.

Calculer le nombre d’élèves de cette classe.

Soit l’ensemble des élèves pratiquant le latin et l’ensemble des élèves pratiquant le théâtre.

On a alors :

Schématisons la situation à l’aide d’un diagramme :



On en déduit que le nombre d’élèves de la classe est égale à :

.

2) Principe multiplicatif

Exemple : Chaque femme choisit une robe et un renard de façon aléatoire.

On considère les 3 ensembles suivants :

On appelle produit cartésien , l’ensemble de tous les triplets formés d’un élément de , d’un élément de et d’un élément de .

La photo présente 3 triplets, de gauche à droite :

Il existe triplets différents.

Définitions : Soit ensembles finis .

- Le produit cartésien est l’ensemble des **couples** où et

.

- Le produit cartésien est l’ensemble des **triplets** où ,

et .  
- Le produit cartésien est l’ensemble des **-uplets** où , … .

Remarque : Si on effectue un produit cartésien d’un ensemble sur lui-même, on note et dans le cas général, est le produit de ensembles .

Exemple : On lance deux dés à six faces. On note l’ensemble des résultats possibles pour un dé.

Alors est l’ensemble des couples possibles pour deux dés. On a par exemple :

Il existe couples appartenant à .

Propriété : Soit ensembles finis . Alors on a :

Méthode : Appliquer le principe multiplicatif pour dénombrer

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wzo1XXXaaqY**](https://youtu.be/wzo1XXXaaqY)

Un restaurant propose sur sa carte 3 entrées, 4 plats de résistance et 2 desserts. a) Combien de menus différents composés d’une entrée, d’un plat et d’un dessert peut-on constituer ?

b) Même question si le dessert est une tarte aux pommes imposée.

a) Soit l’ensemble des entrées, celui des plats et celui des desserts.

Alors .

Il existe 24 menus différents.

b)

Il existe 12 menus différents dont le dessert est une tarte aux pommes.

Propriété : Soit un ensemble fini à éléments. Alors on a :

Méthode : Dénombrer le nombre de -uplets d’un ensemble à éléments

 **Vidéo** **<https://youtu.be/rlEbdewplHI>**

Le refrain de la chanson « Digicode » de l’artiste *Oldelaf* comporte une erreur à corriger.

*« Il y avait pour entrer juste un digicode   
 Deux lettres et dix chiffres incommodes   
 Un détail que t'avais surement oublié   
 4 milliards de possibilités »*

Pour écouter la chanson : <https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Digicode.mp3>

Soit l’ensemble des lettres de l’alphabet et l’ensemble des chiffres.

On a alors : et .

Pour le choix des 2 lettres, on compte possibilités.

Pour le choix des 10 chiffres, on compte possibilités.

Nombre de possibilités du digicode :

Soit environ 7 000 milliards de possibilités et non pas 4 milliards comme dans la chanson.

**A noter :** Un digicode contient généralement seulement deux lettres à choisir : A et B.

Dans ce cas : soit 20 milliards. Cela reste loin encore des 4 milliards de la chanson.

II. Arrangements et permutations

1) La factorielle d’un nombre

Définition : On appelle **factorielle** le produit de tous les nombres entiers de à . Et on note :

Remarque : se lit « factorielle  ».

Exemples :

par convention

2) Arrangements

Exemple :

On considère l’ensemble .

- Les triplets et sont des arrangements à 3 éléments de .

Et est un arrangement à 3 éléments de différent de L’ordre des éléments est à prendre en compte.

- Le quintuplet est un arrangement à 5 éléments de .

- Le sextuplet n’est pas un arrangement de car des éléments se répètent.

Définition : Soit un ensemble à éléments. Et .

Un **arrangement** de éléments de est un -uplet d’éléments distincts de .

Propriété : Dans un arrangement l’ordre des éléments compte et les éléments ne se répètent pas.

Exemple : On prolonge l’exemple précédent pour calculer le nombre d’arrangements à 3 éléments de .

- Il existe 5 choix pour la 1ère lettre.

- La 1ère lettre étant fixée, il existe 4 choix pour la 2e lettre. Car il n’y a pas répétition d’éléments.

- Les deux premières lettres étant fixées, il existe 3 choix pour la 3e lettre.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre d’arrangements à 3 éléments de est égal à : .

Propriété : Soit un ensemble à éléments.

Le nombre d’arrangements de éléments de est égal à :

Méthode : Dénombrer en utilisant les arrangements

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2fKdO9t8wfo**](https://youtu.be/2fKdO9t8wfo)

Pour nettoyer un appareil électrique, Fred débranche les 3 prises qui se trouvent à l’arrière de l’appareil.



Mais au moment d’effectuer à nouveau les branchements, il se rend compte qu’il existe 12 positions différentes pour les 3 prises.

Comme il n’a pas pris soin de noter les positions respectives des 3 prises et qu’il n’y connait rien en électronique, il décide d’effectuer les branchements au hasard.

Quelle est la probabilité qu’il retrouve le bon branchement.

*Voir cet exercice en version filmée :* [**http://youtu.be/tbQtm1ufIIY**](http://youtu.be/tbQtm1ufIIY)

Fred doit choisir 3 positions parmi 12. L’ordre a une importance, on voit que les prises sont de différentes couleurs.

Il existe 12 positions possibles pour la 1ère prise. Celle-ci étant fixée, il existe alors 11 positions pour la 2e et ainsi 10 positions pour la 3e prise.

En appliquant le principe multiplicatif, le nombre de postions possibles est égal à : .

On peut également considérer que le nombre de positions possibles est un arrangement de 3 éléments parmi 12, soit :

Parmi les positions, une seule est la bonne. La probabilité que Fred retrouve le bon branchement est égal à :.

3) Permutations

Exemple : On considère l’ensemble .

Les quintuplets et sont des permutations de car ce sont des -uplets qui utilisent tous les éléments de .

Définition : Soit un ensemble à éléments.

Une **permutation** de est un arrangement à éléments de .

Propriété : Soit un ensemble à éléments.

Le nombre de permutations de est égal à .

Exemple :

Il existe façons différentes que 3 personnes s’assoient sur un banc à 3 places.

Méthode : Dénombrer en utilisant les permutations

 **Vidéo** [**https://youtu.be/kWEFtcWl\_xU**](https://youtu.be/kWEFtcWl_xU)

Pour une conférence, on a invité 12 scientifiques, 6 hommes et 6 femmes renommés, qui seront placés au premier rang de la salle qui comprend 12 places. On attend 5 mathématiciens, 3 physiciens et 4 biologistes.



C’est le moment de prendre place, l’organisateur demande aux scientifiques de s’installer.

- Les mathématiciens proposent que chacun choisisse une place au hasard.

- Les physiciens préfèrent rester ensemble et qu’ainsi tous les physiciens soient assis côte à côte.

- Les biologistes disent que dans ce cas, il serait mieux que les hommes se placent ensemble et que les femmes en fassent de même.

Calculer le nombre de façons différentes de s’assoir pour chaque proposition.

- Proposition des mathématiciens :

Le nombre de façons de placer ces 12 scientifiques est égal au nombre de permutations dans un ensemble à 12 éléments, soit :

12! = 1 × 2 × 3 × 4 × 5 × 6 × 7 × 8 × 9 × 10 × 11 × 12 = 479 001 600.

- Proposition des physiciens :

Le groupe des physiciens est composé de 3 personnes. Vu qu’ils souhaitent s’assoir côte à côte, le groupe dispose de 10 positions possibles :

Les places 1-2-3 ou 2-3-4 ou 3-4-5 ou … ou 10-11-12.

Au sein du groupe des physiciens, le nombre de façons de s’assoir est égal au nombre de permutations d’un ensemble à 3 éléments, soit : 3! = 6.

Au sein du groupe formé par les autres scientifiques, le nombre de façons de s’assoir est égal au nombre de permutations d’un ensemble à 12 – 3 = 9 éléments, soit : 9! = 362 880.

Donc, d’après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s’assoir selon les physiciens est égal à : 10 × 6 × 362 880 = 21 772 800.

- Proposition des biologistes :

Le nombre d’ordres possibles pour placer le groupe des femmes et des hommes est égal à 2 : hommes-femmes ou femmes-hommes.

Au sein du groupe des femmes, le nombre de façons de s’assoir est égal au nombre de permutations d’un ensemble à 6 éléments, soit : 6! = 720.

De même pour le groupe des hommes : 6! = 720.

Donc, d’après le principe multiplicatif, le nombre total de façons de s’assoir selon les biologistes est égal à : 2 × 720 × 720 = 1 036 800.

III. Combinaisons

1) Nombre de combinaisons

Exemple : On considère l’ensemble .

Le sous-ensemble est appelée une combinaison de à 3 éléments.

Le sous-ensemble est appelée une combinaison de à 2 éléments.

Pour une combinaison, l’ordre n’a pas d’importance. Ainsi et correspondent à la même combinaison de .

Définition : Soit un ensemble à éléments. Et .

Une **combinaison** de éléments de est un sous-ensemble de .

Propriété : Soit un ensemble à éléments.

Le nombre de combinaisons de éléments de est égal à :

Ce nombre se note : .

Cas particuliers : Pour tout entier naturel *n* :

Méthode : Dénombrer en utilisant les combinaisons

 **Vidéo** [**https://youtu.be/\_ip2dV\_BUTM**](https://youtu.be/_ip2dV_BUTM)

Une classe composée de 18 filles et 16 garçons va élire les 4 délégués. Dans cet exercice, on ne distingue pas les délégués et les délégués-adjoints.

a) Combien existe-t-il de possibilités pour cette élection ?

b) Emma dit qu’elle ne souhaite pas être élue si Bastien est élu. Dans ces conditions, combien existe-t-il de possibilités ?

a) On compte le nombre de combinaison de 4 élèves parmi élèves, soit :

b) On commence par compter le nombre de possibilités tel que Emma et Bastien sont élus.

Si Emma et Bastien sont élus, il reste à choisir 2 élèves parmi 32, soit le nombre de combinaisons de 2 élèves parmi 32 élèves, soit encore :

Ainsi dans ce cas, le nombre de possibilités est égal à .

2) Coefficients binomiaux

Le nombre de combinaisons de parmi porte également le nom de **coefficient binomial** en référence à une loi de probabilité : la loi binomiale qui est définie à l’aide des coefficients . Celle-ci sera étudiée dans un chapitre ultérieur.

Propriété de symétrie : Pour tout entier naturel tel que :

Propriété du triangle de Pascal : Pour tout entier naturel tel que :

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/xVNjVABYOno**](https://youtu.be/xVNjVABYOno)

Méthode : Calculer des coefficients binomiaux

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-gvlrfFdaS8**](https://youtu.be/-gvlrfFdaS8)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/mfcBNlUuGaw**](https://youtu.be/mfcBNlUuGaw)

Calculer : a)   b)

1) .

2)

Avec la calculatrice : Il est possible de vérifier les résultats à l'aide d'une calculatrice. La fonction se nomme "***combinaison***" ou "***nCr***".

Pour calculer , on saisit : 25***combinaison***24 ou 25***nCr***24 suivant le modèle de calculatrice.

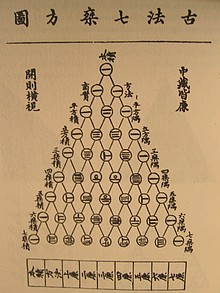
Avec un tableur : La fonction se nomme "***COMBIN***". Pour calculer , on saisit : =***COMBIN***(25;24)

3) Triangle de Pascal

Le tableau qui suit se complète de proche en proche comme combinaisons répondant à la propriété du triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal peut être utilisé par exemple pour déterminer rapidement les coefficients binomiaux.

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6JGrHD5nAoc**](https://youtu.be/6JGrHD5nAoc)



*Blaise Pascal* (1623 ; 1662) fait la découverte d’un triangle arithmétique, appelé aujourd'hui "triangle de Pascal". Son but est d'exposer mathématiquement certaines combinaisons numériques dans les jeux de hasard et les paris. Cette méthode était déjà connue des perses mais aussi du mathématicien chinois *Zhu Shi Jie*(XIIe siècle).

Ci-contre, le triangle de *Zu Shi Jie* extrait de son ouvrage intitulé *Su yuan zhian* (1303).

↓ Exemple pour

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| *p*  *n* | 0 | 1 | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 0 | 1 |  |  |  |  |  |  |
| 1 | 1 | 1 |  |  |  |  |  |
| 2 | 1 | 2 | 1 |  |  |  |  |
| 3 | 1 | 3 | 3 | 1 |  |  |  |
| **4** | 1 | 4 | =6 | 4 | 1 |  |  |
| 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |  |
| 6 | 1 | 6 | 15 | 20 | 15 | 6 | 1 |

↑ Exemple pour .

4) Parties d’un ensemble

Propriété : Soit un ensemble à éléments.

Le nombre de sous-ensemble de est égal à :

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/xVNjVABYOno**](https://youtu.be/xVNjVABYOno)

- Le nombre de sous-ensemble de est égal à la somme des sous-ensembles à 0 éléments, à 1 éléments, à 2 éléments, …, à éléments.

Soit :

- Par ailleurs, pour construire un sous-ensemble de , on considère étapes où à chaque élément de , on décide de le choisir ou de ne pas le choisir pour l’inclure dans le sous-ensemble.

Il y a donc deux possibilités par étape et il y a étapes.

Il y a donc ( facteurs) possibilités de construire un sous-ensemble de , soit .

Exemple :

Soit : .

Alors toutes les parties de sont :

, , , , , , , .

Elles sont au nombre de et en effet :

**Arrangement, permutation, combinaison... : lequel choisir ? :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8MVCbhQF2ak**](https://youtu.be/8MVCbhQF2ak)



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)