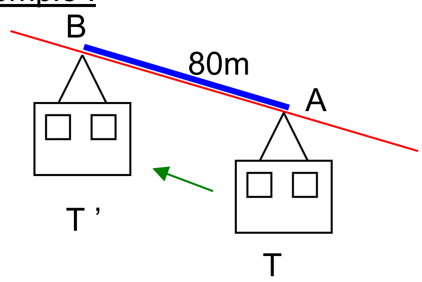
LES VECTEURS

I. Translation

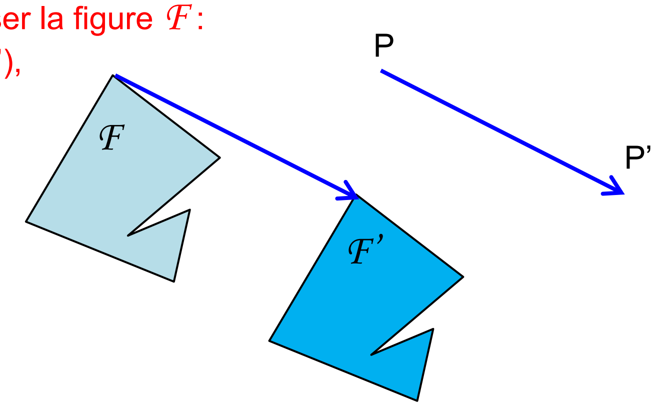
Exemple :



Une translation est un glissement :
- avec une direction donnée :
  câble du téléphérique, la droite (AB),
- avec un sens donné :
  le téléphérique monte de A vers B,
- avec une longueur donnée :
  80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T' est l'image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

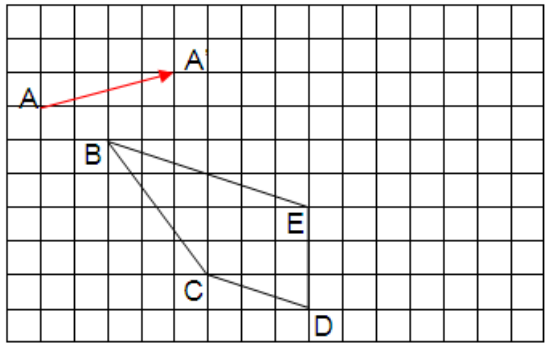
Définition :
Soit P et P' deux points distincts du plan.
On appelle **translation** qui envoie P sur P' la transformation dont l'image $\mathcal{F}'$ d'une figure $\mathcal{F}$ est obtenue en faisant glisser la figure $\mathcal{F}$:
- selon la direction de la droite (PP'),
- dans le sens de P vers P',
- d'une longueur égale à PP'.

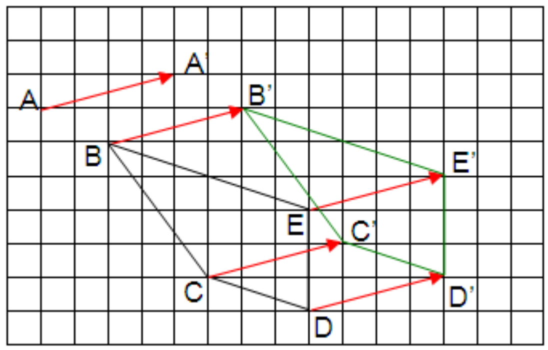


Méthode : Construire l'image d'une figure par une translation

Vidéo https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk

Soit ***t*** la translation qui transforme A en A'.
Construire l'image B'C'D'E' du trapèze BCDE par la translation ***t***.



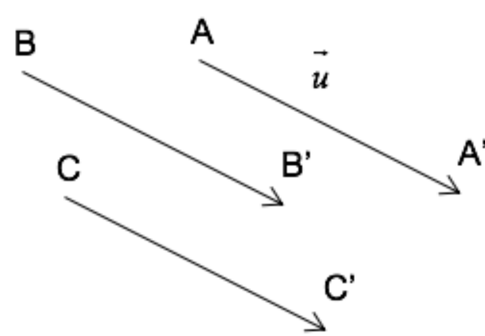


II. Vecteurs

1. Définition :

Définition :
Soit t la translation qui envoie A sur A', B sur B' et C sur C'.
Les couples de points (A ; A'), (B ; B') et (C ; C') définissent un **vecteur** caractérisé par :
- une direction : celle de la droite (AA'),
- un sens : de A vers A',
- une longueur : la longueur AA'.

On note $\vec{u}$ ce vecteur et on écrit : $\vec{u} = \overrightarrow{AA'}$.
On dit que $\overrightarrow{AA'}$ est un **représentant** de $\vec{u}$.
$\overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{CC'}$ sont également des représentants de $\vec{u}$.



Remarque : La longueur d'un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.

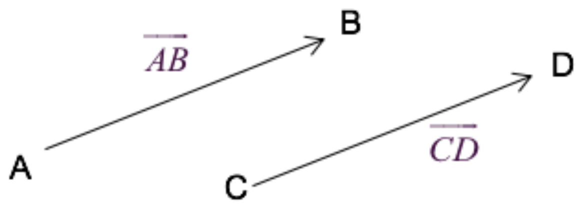
« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)
Le mot a été introduit en 1925 et la notation $\overrightarrow{AB}$ en 1920.
A l'origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

2. Égalité de vecteurs

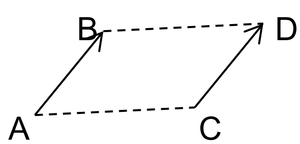
Définition :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont **égaux** lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur.

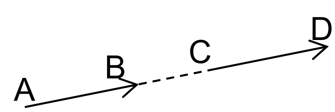
On note $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Exemple :
Ci-dessous, on peut poser : $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont des représentants du vecteur $\vec{u}$.



Propriété du parallélogramme :
Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.
Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.





Démonstration :

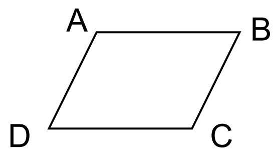
- Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction.
  Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.
- Réciproquement : Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$, définis à l'aide des segments [AB] et [CD] d'un parallélogramme ABDC, sont égaux.

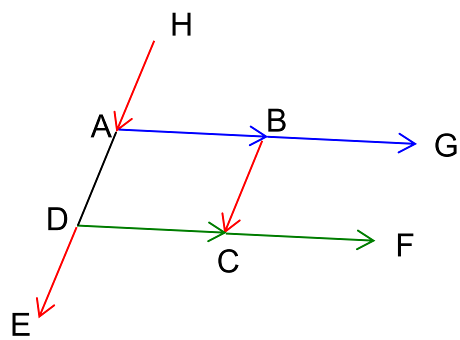
Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/zcQPz4dfnn0

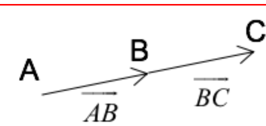
A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$





Propriété du milieu :
Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont égaux.



Exercice : Utiliser des propriétés sur les vecteurs :
Vidéo https://youtu.be/XokpP_8mTOE

3. Vecteur nul

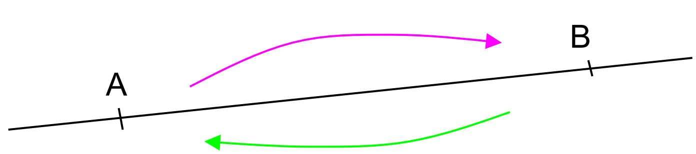
Définition :
Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Remarque : Pour tout point M, on a : $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

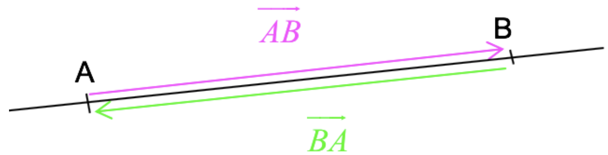
4. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !
Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).
Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».



Définition :
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu'ils ont la même direction, la même longueur et qu'ils sont de sens contraire.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont des vecteurs opposés.
On note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



III. Somme de vecteurs

1. Définition

Exemple :

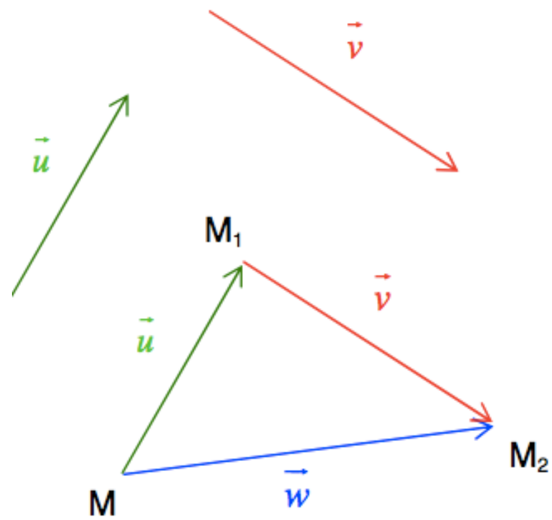
Soit t_1 la translation de vecteur $\vec{u}$
et t_2 est la translation de vecteur $\vec{v}$.

Appliquer la translation t_1 puis la translation t_2 :

$M \overset{t_1}{\longmapsto} M_1 \overset{t_2}{\longmapsto} M_2$

revient à appliquer la translation t de vecteur $\vec{w}$:

$M \xrightarrow{\quad t \quad} M_2$

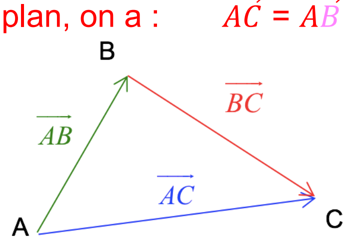


Propriété :
La composée (ou l'enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **somme** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, notée $\vec{u} + \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ associé à la translation composée des translations de vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :
Pour tous points A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.



Remarque :

Dans le triangle ABC, on a également les relations : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.

Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n'est pas de lui, mais nommée ainsi en hommage à ses travaux sur les vecteurs.
Homme naïf, on raconte qu'il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d'arc à sa mère, Vercingétorix à César,…) !

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

Vidéo https://youtu.be/fbVrdYiY0qc

Simplifier les écritures :

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$ b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$ c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$ e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$ f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$

a) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN}$
$= \overrightarrow{AN}$

b) $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{AM}$
$= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MP}$
$= \overrightarrow{AP}$

c) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{KP} + \overrightarrow{NK}$
$= \overrightarrow{NK} + \overrightarrow{KP} = \overrightarrow{NP}$

d) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NM}$
$= \overrightarrow{MM}$
$= \vec{0}$

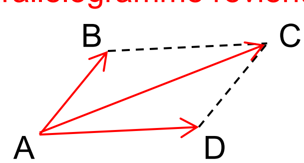
e) $\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{PM} + \overrightarrow{OP}$
$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PM}$
$= \overrightarrow{MM} = \vec{0}$

f) $\overrightarrow{KN} - \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KO} + \overrightarrow{OK}$
$= \overrightarrow{KK} = \vec{0}$

3. Conséquence :

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$,



Démonstration :

D'après la relation de Chasles, l'égalité $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ peut s'écrire :

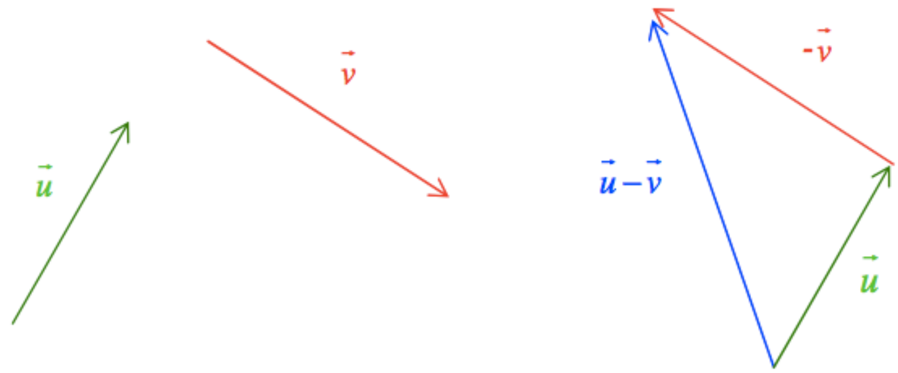
$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

Soit $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$,

soit encore : ABCD est un parallélogramme.

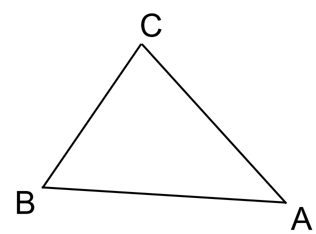
4. Différence de deux vecteurs

Définition :
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs quelconques.
On appelle **différence** du vecteur $\vec{u}$ avec le vecteur $\vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}-\vec{v}$, tel que : $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

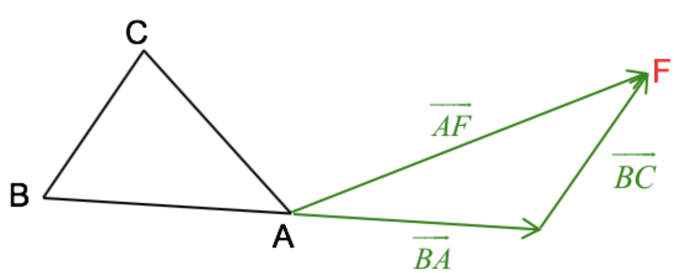


Méthode : Construire un point défini à partir d'une somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/nzABUzFM6p8



Soit un triangle ABC.
Construire le point *F* tel que $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

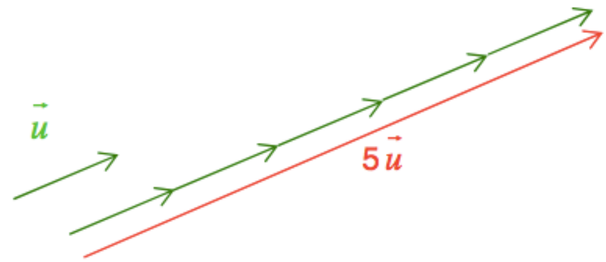


On construit à partir de *A* (origine de $\overrightarrow{AF}$) le vecteur $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$ en mettant « bout à bout » les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$.
On a ainsi construit un vecteur $\overrightarrow{AF}$ et donc le point *F*.

IV. Produit d'un vecteur par un réel

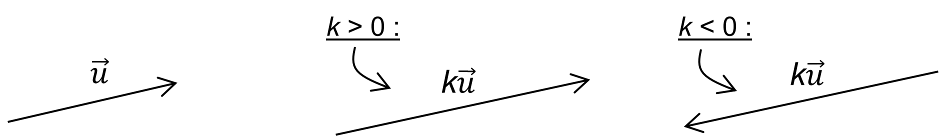
1. Définition

Exemple :
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan.
Appliquer 5 fois la translation de vecteur $\vec{u}$ revient à appliquer la translation de vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = 5\vec{u}$



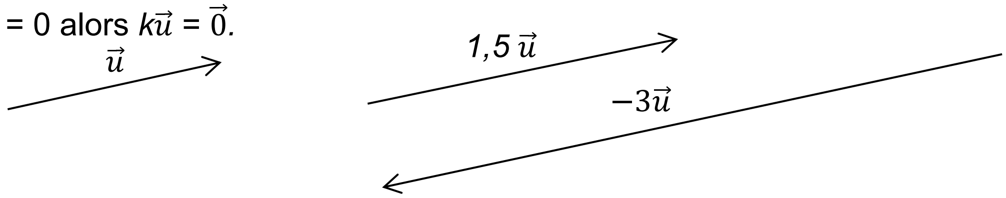
Remarques :
- Les vecteurs $5\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction et le même sens.
- La norme du vecteur $5\vec{u}$ est égale à 5 fois la norme du vecteur $\vec{u}$.

Définition :
$\vec{u}$ est un vecteur quelconque différent de $\vec{0}$ et k un nombre réel non nul.
On appelle **produit** du vecteur $\vec{u}$ par le réel k, le vecteur noté $k\vec{u}$:
- de même direction que $\vec{u}$,
- de même sens que $\vec{u}$ si k > 0 et de sens contraire si k < 0,
- de norme égale à : k fois la norme de $\vec{u}$ si k > 0,
–k fois norme de $\vec{u}$ si k < 0.



Remarque :
Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $k = 0$ alors $k\vec{u} = \vec{0}$.

Exemples :

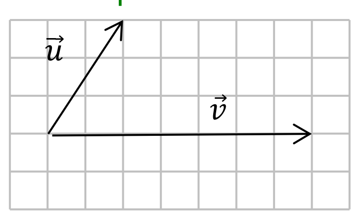


Les vecteurs $\vec{u}$, $1{,}5\,\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ ont la même direction.
$\vec{u}$ et $1{,}5\,\vec{u}$ sont de même sens.
$\vec{u}$ et $-3\vec{u}$ sont de sens contraire.
La norme du vecteur $1{,}5\,\vec{u}$ est égale à 1,5 fois la norme de $\vec{u}$.
La norme du vecteur $-3\vec{u}$ est égale à 3 fois la norme de $\vec{u}$.

2. Construction

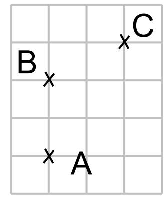
Méthode : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/1C6KEwbO-b8

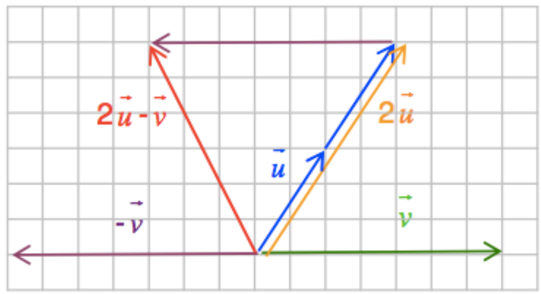


1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Représenter les vecteurs suivants :
$2\vec{u}$, $-\vec{v}$, $2\vec{u} - \vec{v}$.

2) Soit trois points A, B et C.
Représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$.

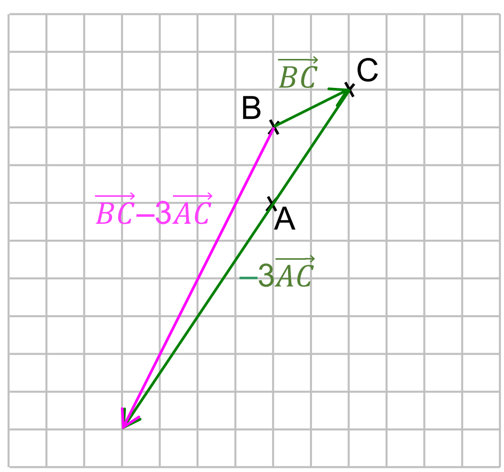


1)



Pour représenter le vecteur $2\vec{u}$, on place bout à bout deux vecteurs $\vec{u}$.
Pour représenter le vecteur $-\vec{v}$, on représente un vecteur de même direction et même longueur que $\vec{v}$ mais de sens opposé.
Pour représenter le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ ou $2\vec{u} + (-\vec{v})$, on place bout à bout les vecteurs $2\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
Dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit, le vecteur $2\vec{u} - \vec{v}$ a pour origine l'origine du vecteur $2\vec{u}$ et pour extrémité, l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$.
On obtiendrait le même résultat en commençant par placer le vecteur $-\vec{v}$ et ensuite le vecteur $2\vec{u}$.

2)

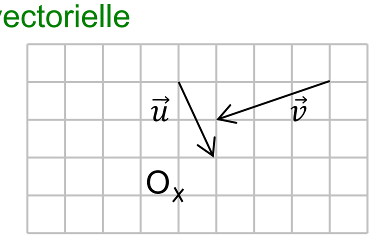


Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{BC} - 3\overrightarrow{AC}$ ou $\overrightarrow{BC} + (-3\overrightarrow{AC})$, on place bout à bout les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $-3\overrightarrow{AC}$.

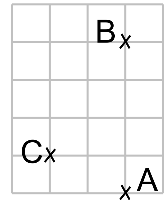
Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/JxYpPE6iPEA

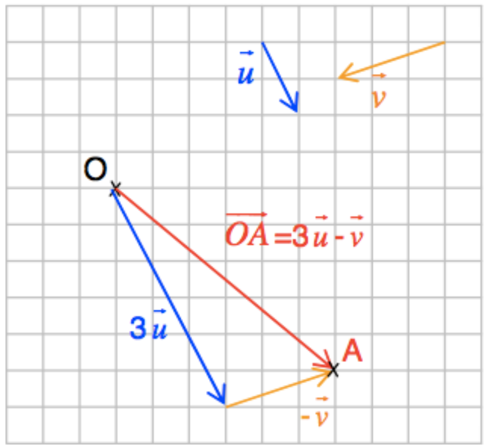
1) Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et un point O du plan.
Construire le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$.



2) Soit trois points A, B, C du plan.
Construire le point M tel que $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$.

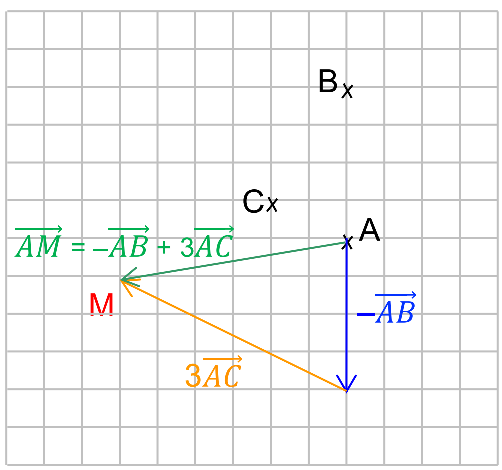


1)



Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u} - \vec{v}$, on place bout à bout à partir du point O les vecteurs $3\vec{u}$ et $-\vec{v}$.
Le point A se trouve à l'extrémité du vecteur $-\vec{v}$ dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

2)

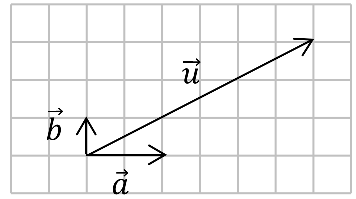


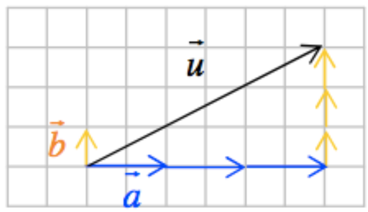
Pour représenter le vecteur $\overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$, on place bout à bout à partir de A les vecteurs $-\overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{AC}$.
Le point M se trouve à l'extrémité du vecteur $3\overrightarrow{AC}$ dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d'autres vecteurs

Vidéo https://youtu.be/ODZGKdlKewo

Par lecture graphique, exprimer le vecteur $\vec{u}$ en fonction des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.





On construit *« un chemin »* de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\vec{u}$.
On compte ainsi le nombre de vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ formant *« le chemin »*.

$\vec{u} = 3\vec{a} + 3\vec{b}$.

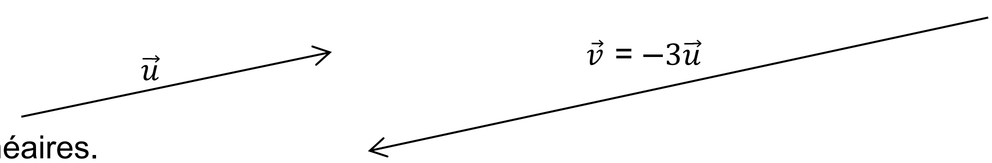
V. Notion de colinéarité

1. Définition

Définition :
Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** signifie qu'ils ont même direction c'est à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Remarque :
Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

Exemple :



$\vec{v} = -3\vec{u}$
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

Vidéo https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg

On donne $\vec{u}$ un vecteur du plan. Soit un vecteur $\vec{v}$ tel que $-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$.
Démontrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$-4\vec{u} + 3\vec{v} = \vec{0}$
$-4\vec{u} = -3\vec{v}$
$\frac{4}{3}\vec{u} = \vec{v}$

Il existe un nombre réel $k = \frac{4}{3}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

2. Applications

Propriétés :

1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.
Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

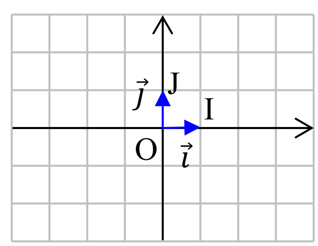
2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

3. Transformations et vecteurs

Propriétés :

1) Si une symétrie centrale transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$.
2) Si une homothétie de rapport λ transforme A en A' et B en B' alors : $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$.

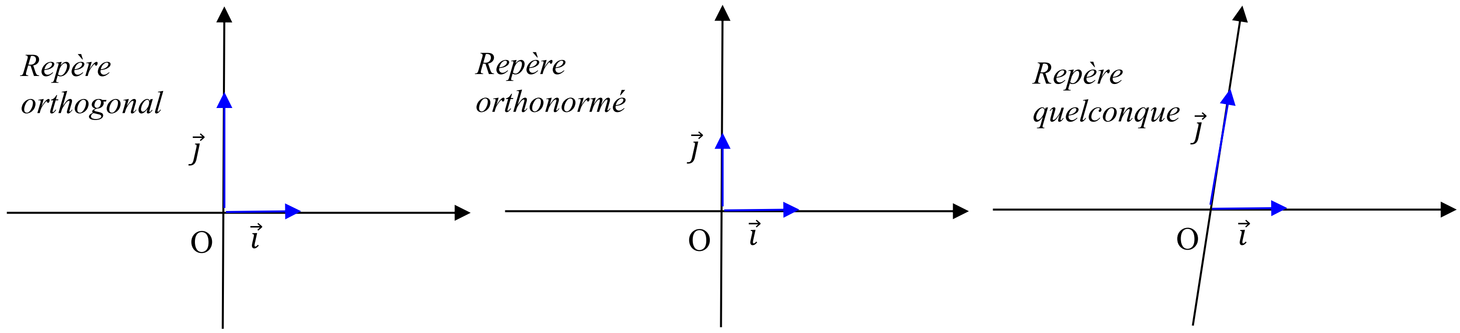
VI. Repère du plan



Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l'on peut noter (O, I, J).
L'origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, alors ce repère se note également (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$).

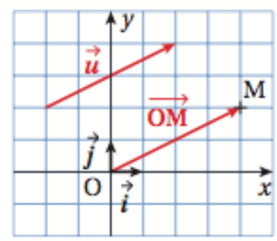
Définitions :
- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) où O est un point et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
- Un repère est dit **orthogonal** si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ ont des directions perpendiculaires.
- Un repère est dit **orthonormé** s'il est orthogonal et si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1.



VII. Coordonnées d'un vecteur

<u>Définition :</u> Soit M un point quelconque d'un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et un vecteur $\vec{u}$ tel que : $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Les **coordonnées du vecteur** $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M.

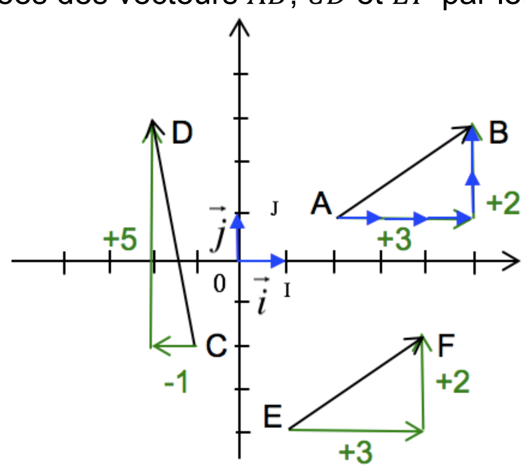
On note : $\vec{u}\,(x, y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



<u>Méthode :</u> Déterminer les coordonnées d'un vecteur par lecture graphique

Vidéo https://youtu.be/8PyiMHtp1fE

Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un « *chemin* » de vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ mis bout à bout reliant l'origine et l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{AB}$.
Ainsi $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$.
Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont donc $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. De même, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$

Comme $-\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ ont pour coordonnées respectives $\begin{pmatrix} -x_A \\ -y_A \end{pmatrix}$ (voir propriété qui suit) et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

Méthode : Déterminer les coordonnées d'un vecteur par calcul

Vidéo https://youtu.be/wnNzmod2tMM

Retrouver les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{EF}$ par calcul avec :
A$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, E$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ et F$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2-(-1) \\ 3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix},$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -2-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) et un réel *k*.

- $\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$
- Le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$
- Le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$

Remarque :

Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors $-\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} -x \\ -y \end{pmatrix}$.

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

Vidéo https://youtu.be/rC3xJNCuzkw

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs $3\overrightarrow{AB}$, $4\overrightarrow{CD}$ et $3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD}$.

On a : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}3 \times 3\\3 \times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\6\end{pmatrix}$, $4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}4 \times (-1)\\4 \times 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\20\end{pmatrix}$

$3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix}9-(-4)\\6-20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-14\end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un point défini par une égalité vectorielle

Vidéo https://youtu.be/eQsMZTcniuY

Dans un repère, soit les points A$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4-1\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}1-x_D\\-2-y_D\end{pmatrix}$
Donc $1 - x_D = -5$ et $-2 - y_D = 1$
Soit $x_D = 6$ et $y_D = -3$.

VIII. Colinéarité de deux vecteurs

1) Critère de colinéarité

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : $xy' - yx' = 0$.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/VKMrzaiPtw4

- Si l'un des vecteurs est nul alors l'équivalence est évidente.
- Supposons maintenant que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient non nuls.

Dire que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
Les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

x	x'
y	y'

Donc : $xy' = yx'$ soit encore $xy' - yx'$ = 0.
Réciproquement, si $xy' - yx'$ = 0.
Le vecteur $\vec{v}$ étant non nul, l'une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que $x' \neq 0$. Posons alors $k = \frac{x}{x'}$. L'égalité $xy' - yx'$ = 0 s'écrit : $yx' = xy'$.

Soit : $y = \frac{xy'}{x'} = ky'$.
Comme on a déjà $x = kx'$, on en déduit que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

Vidéo **https://youtu.be/eX-_639Pfw8**

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-7\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-12\\21\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}15\\-7\end{pmatrix}$

a) 4 x 21 – (–7) x (–12) = 84 – 84 = 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

On peut également observer directement que $\vec{v} = -3\vec{u}$.

b) 5 x (–7) – (–2) x (15) = –35 + 30 = –5 $\neq$ 0.
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

Le nombre $xy' - yx'$ est appelé déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

On note : $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = \begin{vmatrix}x & x'\\y & y'\end{vmatrix} = xy' - yx'$.

Propriété :
Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires revient à dire que $det(\vec{u}\,;\,\vec{v}) = 0$.

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l'aide du déterminant

Vidéo **https://youtu.be/MeHOuwy81-8**

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\10\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}9\\-15\end{pmatrix}$ b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\9\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}11\\23\end{pmatrix}$

a) $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 10 & -15 \end{vmatrix} = (-6) \times (-15) - 10 \times 9 = 90 - 90 = 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires.

b) $det(\vec{u}\ ;\ \vec{v}) = \begin{vmatrix} 4 & 11 \\ 9 & 23 \end{vmatrix} = 4 \times 23 - 9 \times 11 = 92 - 99 = -7 \neq 0$
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires.

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité

Vidéo https://youtu.be/hp8v6YAQQRI
Vidéo https://youtu.be/dZ81uKVDGpE

On considère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Soit A$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, B$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, C$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$, D$\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$ et E$\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.
1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

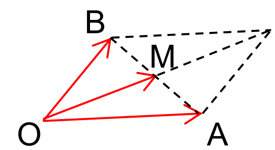
1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-(-1) \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 6-(-2) \\ -1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Comme les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) $\overrightarrow{EB} = \begin{pmatrix} 3-5 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 6-5 \\ -1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
$det(\overrightarrow{EB}\ ;\ \overrightarrow{ED}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -2 \times (-1) - 2 \times 1 = 0$
Les coordonnées de $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.
On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont colinéaires.
Les points E, B et D sont donc alignés.

IX. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété : Soit A et B deux points de coordonnées $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$). Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$$

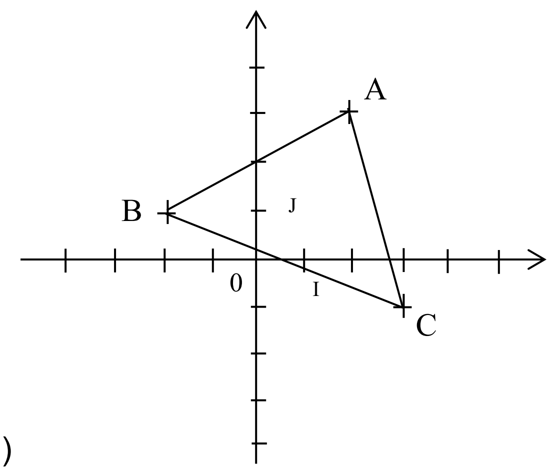


Démonstration :
Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.
Soit M son centre.

Alors $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$.
$\overrightarrow{OM}$ (ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur $\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ soit :
$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{pmatrix}$

Méthode : Calculer les coordonnées d'un milieu

Vidéo https://youtu.be/YTQCtSvxAmM



On considère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$) un repère du plan.
Soit A$\binom{2}{3}$, B$\binom{-2}{1}$ et C$\binom{3}{-1}$.
Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].

M ($\frac{2+(-2)}{2}$; $\frac{3+1}{2}$) = (0 ; 2) N ($\frac{2+3}{2}$; $\frac{3+(-1)}{2}$) = (2,5 ; 1)
P ($\frac{-2+3}{2}$; $\frac{1+(-1)}{2}$) = (0,5 ; 0)

X. Distance dans un repère orthonormé

Propriété :
Soit A et B deux points de coordonnées $\binom{x_A}{y_A}$ et $\binom{x_B}{y_B}$ dans un repère ***orthonormé*** (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$), alors : AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

Vidéo https://youtu.be/pP8ebg8W9o8

Soit A$\binom{3}{2}$ et B$\binom{2}{-2}$ deux points dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).

La distance AB (ou norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$) est égale à :

AB = $\sqrt{(2-3)^2+(-2-2)^2}$
= $\sqrt{1+16}$
= $\sqrt{17}$