# LES VECTEURS

1. Translation

Exemple :

B

T ’

T

80m Une translation est un glissement :

A - avec une direction donnée :

câble du téléphérique, la droite (AB),

- avec un sens donné :

le téléphérique monte de A vers B,

- avec une longueur donnée :

80m, longueur AB

On dit que : Le téléphérique T’ est l’image du téléphérique T par la translation qui transforme A en B.

Définition :

Soit P et P’ deux points distincts du plan.

On appelle **translation** qui envoie P sur P’ la transformation dont l’image F’ d’une figure F est obtenue en faisant glisser la figure F :

P

P’

F

F’

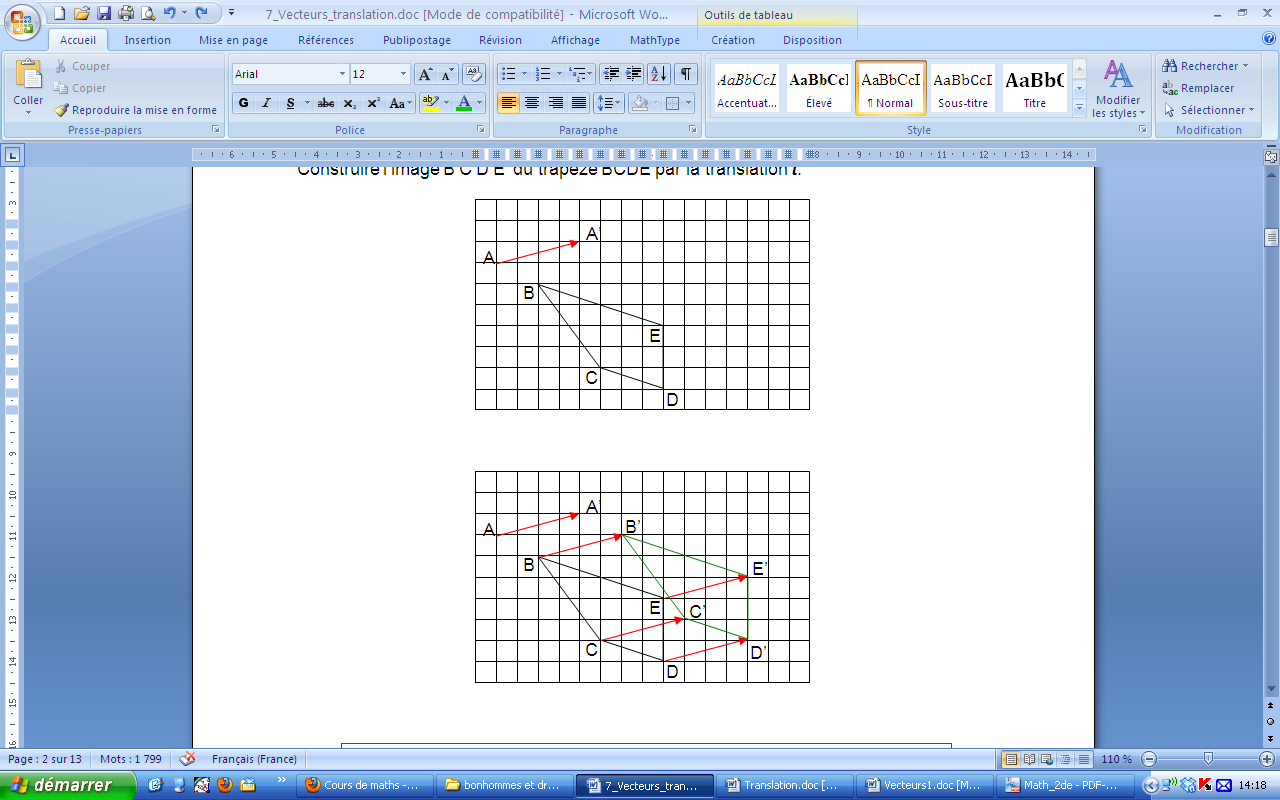
* selon la direction de la droite (PP’),
* dans le sens de P vers P’,
* d’une longueur égale à PP’.

Méthode : Construire l’image d’une figure par une translation

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk**](https://youtu.be/8Jb9cMOeYSk)

Soit ***t*** la translation qui transforme A en A’.

Construire l’image B’C’D’E’ du trapèze BCDE par la translation ***t***.



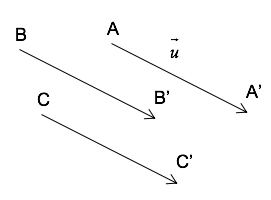
1. Vecteurs
   1. Définition :

Définition :

Soit *t* la translation qui envoie A sur A’, B sur B’ et C sur C’.

Les couples de points (A ; A’), (B ; B’) et (C ; C’) définissent un **vecteur** caractérisé par :

* une direction : celle de la droite (AA’),
* un sens : de A vers A’,
* une longueur : la longueur AA’.



On note ce vecteur et on écrit : *= .*

On dit que *e*st un **représentant** de *.*

etsont également des représentants de *.*

Remarque : La longueur d’un vecteur est aussi appelée la **norme** du vecteur.



« vecteur » vient du latin « vehere » (conduire, transporter)

Le mot a été introduit en 1925 et la notation en 1920.

A l’origine des vecteurs, un italien, ***Giusto Bellavitis*** (1803-1880) qui les désignait comme *segments équipollents*.

* 1. Égalité de vecteurs

Définition :

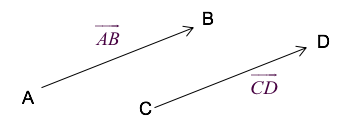
Les vecteurs et sont **égaux** lorsqu’ils ont même direction, même sens et même longueur.

On note = .

Exemple :

Ci-dessous, on peut poser : = = .

et sont des représentants du vecteur .



Propriété du parallélogramme :

Soit A, B, C et D quatre points deux à deux distincts.

Dire que les vecteurs et sont égaux revient à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme, éventuellement aplati.

B

A

D

C

D

C

B

A

Démonstration :

* Si = , la translation de vecteur transforme le point C en D. Les segments [AB] et [CD] ont donc même longueur et même direction.

Le quadrilatère non croisé ABDC est donc un parallélogramme éventuellement aplati.

* Réciproquement : Les côtés opposés d’un parallélogramme sont parallèles et de même longueur donc les vecteurs et , déﬁnis à l’aide des segments [AB] et [CD] d’un parallélogramme ABDC, sont égaux.

Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/zcQPz4dfnn0**](https://youtu.be/zcQPz4dfnn0)

A partir du parallélogramme ABCD, construire les points E, F, G et H tels que :

A

D

B

C

=

=

=

=

H

B

A

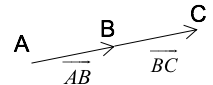
G

F

D

C

E

Propriété du milieu :

Dire que B est le milieu du segment [AC] revient à dire

que  et sont égaux.

Exercice : Utiliser des propriétés sur les vecteurs :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XokpP\_8mTOE**](https://youtu.be/XokpP_8mTOE)

* 1. Vecteur nul

Définition :

Un vecteur est **nul** lorsque les points A et B sont confondus.

On note : = .

Remarque : Pour tout point M, on a : =.

* 1. Vecteurs opposés

Il ne faut pas confondre sens et direction !

Une droite définit une direction, ci-dessous la direction de la droite (AB).

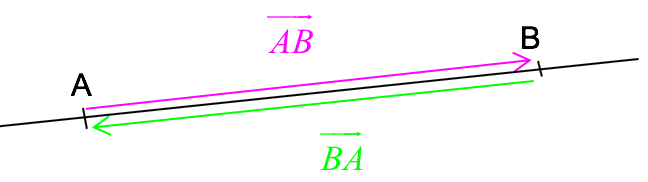
Cependant une direction possède deux sens, ici de « A vers B » ou de « B vers A ».

A

B

Définition :

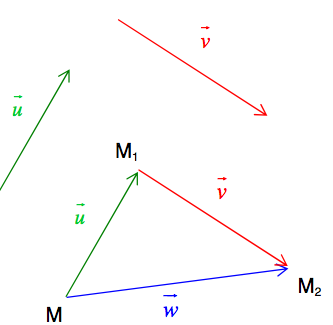
Deux vecteurs sont **opposés** lorsqu’ils ont la même direction, la même longueur et qu’ils sont de sens contraire.



et sont des vecteurs opposés.

On note =

1. Somme de vecteurs



* 1. Définition

Exemple :

Soit *t1* la translation de vecteur

et *t2* est la translation de vecteur *.*

Appliquer la translation *t1* puis la translation *t2* :

*t1* *t2*

M M1 M*2*

revient à appliquer la translation *t* de vecteur :

*t*

M M*2*

Propriété :

La composée (ou l’enchaînement) de deux translations est une translation.

Définition :

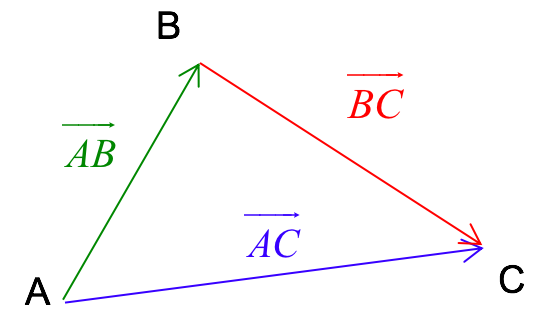
et sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **somme** des vecteurs et , notée + *,* le vecteurassocié à la translation composée des translations de vecteurs et *.*

* 1. Une relation fondamentale

La relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C du plan, on a : = + .



Remarque :

Dans le triangle ABC, on a également les relations : *= +*

*= + .*



Michel Chasles (Fr, 1793-1880) : La relation n’est pas de lui, mais nommée ainsi en

hommage à ses travaux sur les vecteurs.

Homme naïf, on raconte qu’il fut ruiné en achetant de fausses lettres (Jeanne d’arc à

sa mère, Vercingétorix à César,…) !

Méthode : Appliquer la relation de Chasles (non exigible)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/fbVrdYiY0qc**](https://youtu.be/fbVrdYiY0qc)

Simplifier les écritures :

a) + b) + c) + +

d) + e) + + f) – +

a) + b) + c) + +

*= = + = + +*

*= = +*

*= + =*

d) + e) + + f) – +

*= = + + = + +*

*= = + = +*

*= = = =*

* 1. Conséquence :

Propriété caractéristique du parallélogramme :

Dire que ABCD est un parallélogramme revient à dire que  *= + ,*

B

A

C

D

Démonstration :

D’après la relation de Chasles, l’égalité  *= +*  peut s’écrire :

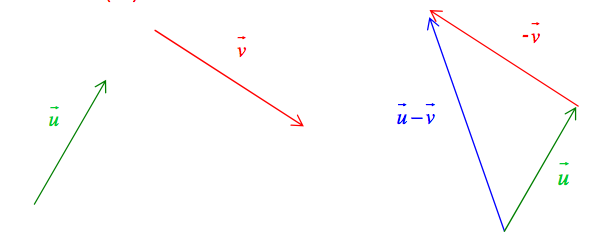
Soit *,*

soit encore : ABCD est un parallélogramme.

* 1. Différence de deux vecteurs

Définition :

et sont deux vecteurs quelconques.

On appelle **différence** du vecteur avec le vecteur , le vecteur noté – *,* tel que : –  *=*  + (–).

Méthode : Construire un point défini à partir d’une somme de vecteurs

C

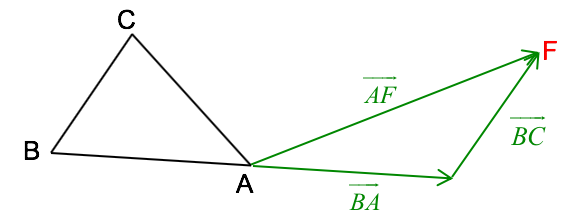
 **Vidéo** [**https://youtu.be/nzABUzFM6p8**](https://youtu.be/nzABUzFM6p8)

Soit un triangle ABC.

Construire le point *F* tel que = +

A

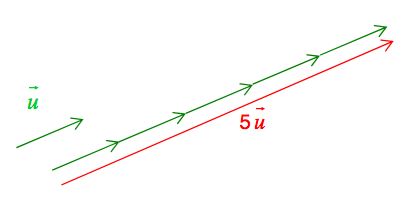
B



On construit à partir de *A* (origine de ) le vecteur + en mettant « bout à bout » les vecteurs et .

On a ainsi construit un vecteur et donc le point *F*.

1. Produit d’un vecteur par un réel
   1. Définition



Exemple :

Soit un vecteur du plan.

Appliquer 5 fois la translation de vecteur revient à appliquer la translation de vecteur =  *+ + + + =*

Remarques :

* Les vecteurs et ont la même direction et le même sens.
* La norme du vecteur est égale à 5 fois la norme du vecteur .

Définition :

est un vecteur quelconque différent de et *k* un nombre réel non nul.

On appelle **produit** du vecteur par le réel *k*, le vecteur noté *k* :

- de même direction que ,

- de même sens que si k > 0 et de sens contraire si k < 0,

- de norme égale à : k fois la norme de si k > 0,

–k fois norme de si k < 0.

*k*

*k*

*k* > 0 :

*k* < 0 :

Remarque :

Si = ou *k* = 0 alors *k* = *.*

*1,5*

Exemples :

Les vecteurs *, 1,5* et ont la même direction.

et *1,5* sont de même sens.

et sont de sens contraire.

La norme du vecteur *1,5* est égale à 1,5 fois la norme de .

La norme du vecteur est égale à 3 fois la norme de .

* 1. Construction

Méthode : Représenter un vecteur défini comme produit et somme de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/1C6KEwbO-b8**](https://youtu.be/1C6KEwbO-b8)

1) Soit deux vecteurs et.

Représenter les vecteurs suivants :

2, , 2 – .

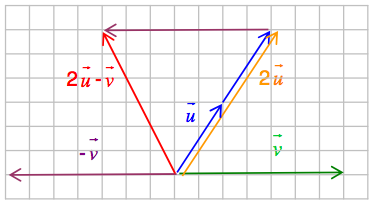
B

C

A

2) Soit trois points A, B et C.

Représenter le vecteur – 3.

1. 

Pour représenter le vecteur 2, on place bout à bout deux vecteurs .

Pour représenter le vecteur –, on représente un vecteur de même direction et même longueur que mais de sens opposé.

Pour représenter le vecteur 2 – ou 2+ (–), on place bout à bout les vecteurs 2 et –.

Dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit, le vecteur 2 – a pour origine l’origine du vecteur 2 et pour extrémité, l’extrémité du vecteur –.

On obtiendrait le même résultat en commençant par placer le vecteur – et ensuite le vecteur 2.

B

C

A

–3

–3

Pour représenter le vecteur – 3ou *+* (–3), on place bout à bout les vecteurs et *–*3.

Méthode : Construire un point vérifiant une égalité vectorielle

O

 **Vidéo** [**https://youtu.be/JxYpPE6iPEA**](https://youtu.be/JxYpPE6iPEA)

1) Soit deux vecteurs et et un point O du plan.

Construire le point A tel que = 3 –.

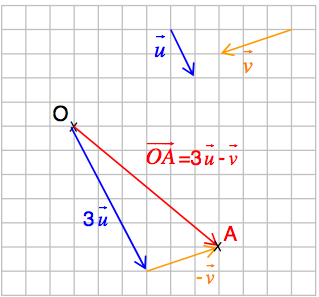
A

C

B

2) Soit trois points A, B, C du plan.

Construire le point M tel que = – + 3.



1)

Pour représenter le vecteur = 3 – , on place bout à bout à partir du point O les vecteurs 3 et –.

Le point A se trouve à l’extrémité du vecteur – dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

M

A

C

B

= – + 3

3

–

2)

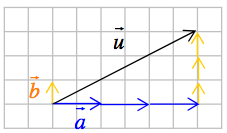
Pour représenter le vecteur = – + 3, on place bout à bout à partir de A les vecteurs – et 3.

Le point M se trouve à l’extrémité du vecteur 3 dans *« le chemin »* de vecteurs ainsi construit.

Méthode : Exprimer par lecture graphique un vecteur en fonction d’autres vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ODZGKdIKewo**](https://youtu.be/ODZGKdIKewo)

Par lecture graphique, exprimer le vecteur en fonction des vecteurs et .



On construit *« un chemin* *»* de vecteurs  et mis bout à bout reliant l’origine et l’extrémité du vecteur .

On compte ainsi le nombre de vecteurs et formant *« le chemin »*.

= 3 + 3.

1. Notion de colinéarité
   1. Définition

Définition :

Deux vecteurs non nuls et sont **colinéaires** signifie qu’ils ont même direction c’est à dire qu’il existe un nombre réel *k* tel que   *= k.*

Remarque :

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur du plan.

*=*

Exemple :

*=*

et sont colinéaires.

Méthode : Démontrer que des vecteurs sont colinéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg**](https://youtu.be/FjUbd9Pbhmg)

On donne un vecteur du plan. Soit un vecteur tel que –4 + 3 = .

Démontrer que les vecteurs et sont colinéaires.

–4 + 3 =

–4 = –3

 =

Il existe un nombre réel *k* = tel que = *k*.

Donc et sont donc colinéaires.

* 1. Applications

Propriétés :

1) A, B, C et D étant quatre points deux à deux distincts du plan.

Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles revient à dire que les vecteurs et sont colinéaires.

2) Dire que les points distincts A, B et C sont alignés revient à dire que les vecteurs et sont colinéaires.

* 1. Transformations et vecteurs

Propriétés :

1) Si une symétrie centrale transforme A en A’ et B en B’ alors : *=* .

2) Si une homothétie de rapport transforme A en A’ et B en B’ alors : *=* .

1. Repère du plan

I

J

O

Trois points distincts deux à deux O, I et J du plan forment un repère, que l’on peut noter (O, I, J).

L’origine O et les unités OI et OJ permettent de graduer les axes (OI) et (OJ).

Si on pose = et = *,* alors ce repère se note également (O, *,* ).

Définitions :

- On appelle **repère du plan** tout triplet (O, *,* ) où O est un point et et sont deux vecteurs non colinéaires.

- Un repère est dit **orthogonal** si et ont des directions perpendiculaires.

- Un repère est dit **orthonormé** s’il est orthogonal et si et sont de norme 1.

O

*Repère orthogonal*

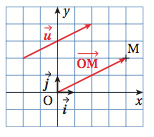
O

*Repère orthonormé*

O

*Repère quelconque*

1. Coordonnées d’un vecteur

Définition : Soit M un point quelconque d’un repère (O, *,*)

et un vecteur tel que : = .

Les **coordonnées du vecteur** sont les coordonnées du

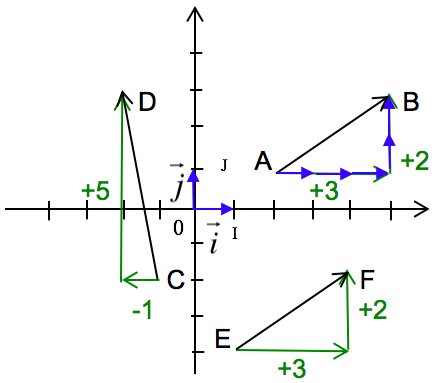
point M.

On note : (*x,* *y*) ou .

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par lecture graphique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/8PyiMHtp1fE**](https://youtu.be/8PyiMHtp1fE)

Déterminer les coordonnées des vecteurs , et par lecture graphique :



Pour aller de A vers B, on effectue une translation de 3 carreaux vers la droite (+3) et une translation de 2 carreaux vers le haut (+2). On trace ainsi un *« chemin »* de vecteurs et mis bout à bout reliant l’origine et l’extrémité du vecteur .

Ainsi = 3 + 2.

Les coordonnées de sont donc . De même, = et = .

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées et dans un repère (O, *,*).

Le vecteur a pour coordonnées .

Démonstration :

*= + =* – *+*

Comme – *et* ont pour coordonnées respectives (voir propriété qui suit) et alors a pour coordonnées .

Méthode : Déterminer les coordonnées d’un vecteur par calcul

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wnNzmod2tMM**](https://youtu.be/wnNzmod2tMM)

Retrouver les coordonnées des vecteurs , et par calcul avec :

A, B, C, D, E et F.

= = , = = ,

= =

Propriétés :

Soit et deux vecteurs de coordonnées et dans un repère

(O, *,* ) et un réel *k*.

- = équivaut à *x* = *x’* et *y = y’*

*-* Le vecteur + a pour coordonnées

*-* Le vecteur *k* apour coordonnées

Remarque :

Si a pour coordonnées alors – a pour coordonnées .

Méthode : Appliquer les formules sur les coordonnées de vecteurs

 **Vidéo** [**https://youtu.be/rC3xJNCuzkw**](https://youtu.be/rC3xJNCuzkw)

En prenant les données de la méthode précédente, calculer les coordonnées des vecteurs 3, 4 et 3 – 4.

On a : = , = et =

3 = = , 4 = =

3 – 4=

Méthode : Calculer les coordonnées d’un point défini par une égalité vectorielle

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eQsMZTcniuY**](https://youtu.be/eQsMZTcniuY)

Dans un repère, soit les points A, B, C.

Déterminer les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

ABCD est un parallélogramme si et seulement si .

On a : et

Donc et

Soit et .

1. Colinéarité de deux vecteurs

1) Critère de colinéarité

Propriété : Soit et deux vecteurs de coordonnées et dans un repère

(O, *,* ). Dire que et sont colinéaires revient à dire que les coordonnées des deux vecteurs sont proportionnelles soit : *xy’ – yx’* = 0.

Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/VKMrzaiPtw4**](https://youtu.be/VKMrzaiPtw4)

* Si l’un des vecteurs est nul alors l’équivalence est évidente.
* Supposons maintenant que les vecteurs et soient non nuls.

Dire que les vecteurs et sont colinéaires équivaut à dire qu’il existe un nombre réel *k* tel que   *= k.*

Les coordonnées des vecteurs et sont donc proportionnelles et le tableau ci-dessous est un tableau de proportionnalité :

|  |  |
| --- | --- |
| *x* | *x’* |
| *y* | *y’* |

Donc : *xy’ = yx’* soit encore *xy’ – yx’* = 0.

Réciproquement, si *xy’ – yx’* = 0.

Le vecteur étant non nul, l’une de ses coordonnées est non nulle. Supposons que

*x’*≠0. Posons alors *k* = . L’égalité *xy’ – yx’* = 0 s’écrit : *yx’* = *xy’.*

Soit : = = .

Comme on a déjà = , on en déduit que  *= k.*

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires

 **Vidéo** [**https://youtu.be/eX-\_639Pfw8**](https://youtu.be/eX-_639Pfw8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs et sont colinéaires.

1. et b) et

a) 4 x 21 – (–7) x (–12) = 84 – 84 = 0.

Les vecteurs et sont donc colinéaires.

On peut également observer directement que .

b) 5 x (–7) – (–2) x (15) = –35 + 30 = –5 ≠ 0.

Les vecteurs et ne sont donc pas colinéaires.

2) Déterminant de deux vecteurs

Définition :

Soit et deux vecteurs de coordonnées et dans un repère (O, *,* ).

Le nombre *xy’ – yx’* est appelé déterminant des vecteurs et .

On note : .

Propriété :

Dire que et sont colinéaires revient à dire que .

Méthode : Vérifier si deux vecteurs sont colinéaires à l’aide du déterminant

 **Vidéo** [**https://youtu.be/MeHOuwy81-8**](https://youtu.be/MeHOuwy81-8)

Dans chaque cas, vérifier si les vecteurs et sont colinéaires.

a) et b) et

a)

Les vecteurs et sont donc colinéaires.

b)

Les vecteurs et ne sont donc pas colinéaires.

3) Applications

Méthode : Appliquer la colinéarité

 **Vidéo** [**https://youtu.be/hp8v6YAQQRI**](https://youtu.be/hp8v6YAQQRI)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/dZ81uKVDGpE**](https://youtu.be/dZ81uKVDGpE)

On considère (O, *,* ) un repère du plan.

Soit A, B, C, D et E.

1) Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

2) Démontrer que les points E, B et D sont alignés.

1) = = et = = .

Comme les coordonnées de et sont proportionnelles, on en déduit que les vecteurs et sont colinéaires.

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles.

2) = = et = .

Les coordonnées de et vérifient le critère de colinéarité des vecteurs.

On en déduit que les vecteurs et sont colinéaires.

Les points E, B et D sont donc alignés.

1. Coordonnées du milieu d’un segment

Propriété : Soit A et B deux points de coordonnées et dans un repère

(O, *,* ). Le milieu M du segment [AB] a pour coordonnées :

B

O

M

A

Démonstration :

Considérons le parallélogramme construit à partir de O, A et B.

Soit M son centre.

Alors = ( + ).

J

I

0

A

B

CV

(ou M) a donc les mêmes coordonnées que celles du vecteur ( + ) soit :

Méthode : Calculer les coordonnées d’un milieu

 **Vidéo** [**https://youtu.be/YTQCtSvxAmM**](https://youtu.be/YTQCtSvxAmM)

On considère (O, *,* ) un repère du plan.

Soit A, B et C.

Calculer les coordonnées de M, N et P milieux respectifs

de [AB], [AC] et [BC].

M ( ; ) = (0 ; 2) N ( ; ) = (2,5 ; 1)

P ( ; ) = (0,5 ; 0)

1. Distance dans un repère orthonormé

Propriété :

Soit A et B deux points de coordonnées et dans un repère ***orthonormé***

(O, *,* ), alors : AB =

*(Cette propriété est une conséquence du théorème de Pythagore)*

Méthode : Calculer une distance dans un repère orthonormé

 **Vidéo** [**https://youtu.be/pP8ebg8W9o8**](https://youtu.be/pP8ebg8W9o8)

Soit A et B deux points dans un repère orthonormé (O, *,*).

La distance AB (ou norme du vecteur ) est égale à :

AB =

O

B

A

=

=



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)