SYSTEMES D'EQUATIONS

I. Méthodes de résolution

1) Méthode de substitution

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode de substitution

Vidéo https://youtu.be/24VsDZK6bN0
Vidéo https://youtu.be/tzOCBkFZgUI

Dans une boulangerie, Fabien achète 3 pains au chocolat et 2 croissants. Il paie 5,60 €.
Dans la même boulangerie, Bob achète 1 pain au chocolat et 3 croissants. Il paie 4,20 €.
Calculer le prix d'un pain au chocolat et d'un croissant.

Choix des inconnues :
x le prix d'un pain au chocolat
y le prix d'un croissant.

Mise en équations :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5{,}60 \\ x + 3y = 4{,}20 \end{cases}$$

Résolution du système d'équations :

A noter : Ici, la méthode de substitution se prête bien à la résolution du système car une équation contient une inconnue facile à isoler : x dans la 2^{e} équation

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5{,}60 \\ x + 3y = 4{,}20 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5{,}60 \\ x = 4{,}20 - 3y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(4{,}20 - 3y) + 2y = 5{,}60 \\ x = 4{,}20 - 3y \end{cases}$$

On **substitue** l'inconnue isolée x dans la 1ère équation.

$$\begin{cases} 12{,}60 - 9y + 2y = 5{,}60 \\ x = 4{,}20 - 3y \end{cases}$$

On résout la 1ère équation pour trouver y.

$$\begin{cases} -7y = -7 \\ x = 4{,}20 - 3y \end{cases}$$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 4{,}20 - 3 \times 1 \end{cases}$ L'inconnue y étant trouvée, on la substitue dans la 2e

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 1{,}20 \end{cases}$ On calcule la valeur de x.

On note : S = {(1,20 ; 1)}

Conclusion :
Le prix d'un pain au chocolat est de 1,20 € et le prix d'un croissant est de 1 €.

2) Méthode des combinaisons linéaires

Méthode : Résoudre un système d'équations par la méthode des combinaisons linéaires

Vidéo https://youtu.be/UPIz65G4f48
Vidéo https://youtu.be/V3yn_oEdgxc

Résoudre le système suivant : $\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$

A noter : Ici, la méthode de substitution ne se prête pas à la résolution du système car en isolant une inconnue, on ramène les équations à des coefficients rationnels. Ce qui compliquerait considérablement les calculs.

On multiplie la première équation par 5 et la deuxième équation par 3 dans le but d'éliminer une inconnue par soustraction ou addition des deux équations.

$$\begin{array}{r} \times 5 \\ \times 3 \end{array} \begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 5x + 3y = 2 \end{cases}$$

On soustraie les deux premières équations. Ici, on élimine l'inconnue x.

$$\begin{array}{c} - \begin{cases} 15x - 10y = 25 \\ 15x + 9y = 6 \end{cases} \\ \hline 15x - 15x - 10y - 9y = 25 - 6 \end{array}$$

On résout l'équation obtenue pour trouver l'inconnue y.

$$-19y = 19$$
$$y = -1$$

On substitue dans une des équations du système la valeur ainsi trouvée pour y et on calcule la valeur de l'autre inconnue.

$$3x - 2 \times (-1) = 5$$
$$3x + 2 = 5$$
$$3x = 5 - 2$$

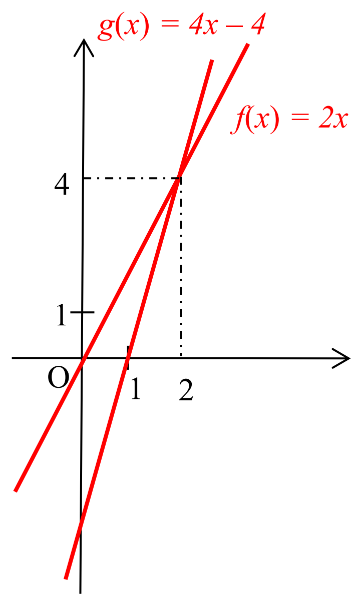
$$3x = 3$$
$$x = 1$$

On note : S = {(1 ; -1)}

II. Interprétation graphique

Vidéo https://youtu.be/-LV_5rkW0RY

1) Droites et systèmes



On considère le système : $\begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - y = 4 \end{cases}$

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y = 2x \\ y = 4x - 4 \end{cases}$

On désigne par (d) et (d') les droites représentant les fonctions respectives :
$f(x) = 2x \text{ et } g(x) = 4x - 4$.
La solution du système est donc le couple (x ; y) coordonnées du point d'intersection des deux droites (d) et (d').
Par lecture graphique, on trouve le couple (2 ; 4) comme solution du système.

Définition :

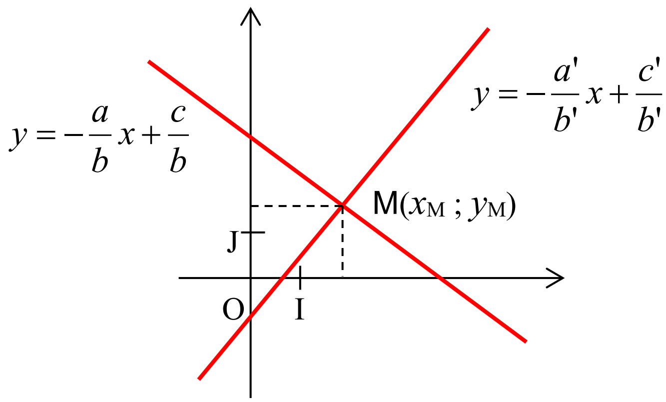
Soit a, b, a' et b' des nombres réels donnés.
Résoudre le système d'équations $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ c'est trouver tous les couples (x ; y) de nombres réels vérifiant simultanément les deux équations du système.

Soit (S) le système d'équations : $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ où a, b, a' et b' sont des nombres réels donnés avec $b \neq 0$ et $b' \neq 0$.

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} by = c - ax \\ b'y = -a'x + c' \end{cases}$

Soit :

$$\begin{cases} y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b} \\ y = -\dfrac{a'}{b'}x + \dfrac{c'}{b'} \end{cases}$$



Si les coefficients directeurs des droites associées à ces deux équations sont différents alors elles possèdent un unique point d'intersection, soit :

$$-\frac{a}{b} \neq -\frac{a'}{b'}$$

Soit encore : $ab' \neq a'b$

Si M est le point d'intersection des deux droites, le couple de ses coordonnées (x_M ; y_M) est solution du système.

2) Exemple d'un système n'admettant pas de solution

Vidéo https://youtu.be/lYzK0zVr-Lk

Soit (S) le système : $\begin{cases} -3x + y = 1 \\ 6x - 2y = 6 \end{cases}$

Résolution du système :

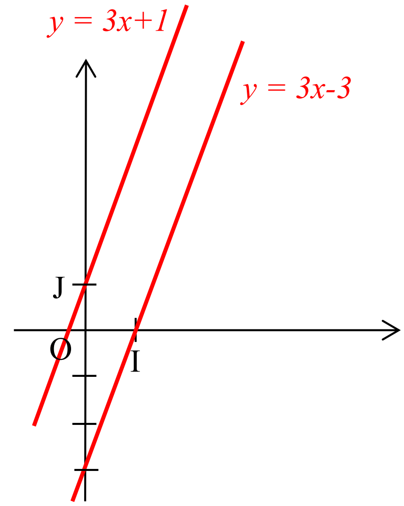
En isolant y dans la première équation, on a : $y = 3x + 1$
En remplaçant y dans la deuxième équation, on a : $6x - 2(3x + 1) = 6$
Soit : $6x - 6x - 2 = 6$
Soit encore : $-2 = 6$. On a abouti à une contradiction.
Les deux équations du système (S) ne peuvent pas être vérifiées simultanément par un couple de nombres réels (x ; y).
Le système (S) ne possède donc pas de solution.

Interprétation géométrique :

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ -2y = -6x + 6 \end{cases}$, soit :

$$\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = \dfrac{-6}{-2}x + \dfrac{6}{-2} \end{cases}$$

Soit encore : $\begin{cases} y = 3x + 1 \\ y = 3x - 3 \end{cases}$



Les droites d'équations $y = 3x + 1$ et $y = 3x - 3$ possèdent des coefficients directeurs égaux, elles sont donc strictement parallèles.

Il n'existe pas de couple de nombres réels $(x \, ; y)$ vérifiant simultanément les équations des deux droites.

3) Exemple d'un système admettant une infinité de solutions

Vidéo https://youtu.be/lYzK0zVr-Lk

Soit (S) le système : $\begin{cases} -6x - 3y = -6 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$

Résolution du système :

Le système (S) équivaut à $\begin{cases} -3y = 6x - 6 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$, soit :

$$\begin{cases} y = \dfrac{6}{-3}x - \dfrac{6}{-3} \\ y = -2x + 2 \end{cases}$$

Soit encore : $\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = -2x + 2 \end{cases}$

Tous les couples de coordonnées $(x \, ; y)$ vérifiant l'équation $y = 2x + 2$ sont solutions du systèmes (S).
Pour x = 5 par exemple, y = -2x5 + 2 = -8. Le couple (5 ; -8) est solution.
Il existe une infinité de couples de nombres réels $(x \, ; y)$ vérifiant l'équation $y = 2x + 2$.
Le système (S) possède donc une infinité de solutions.

Interprétation géométrique :
Les droites associées à ces deux équations sont confondues.