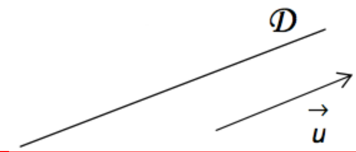
REPÉRAGE

I. Vecteur directeur d'une droite

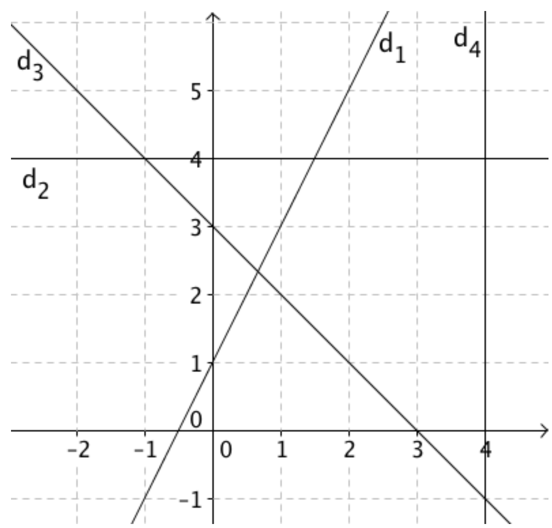
Définition :
D est une droite du plan.
On appelle vecteur directeur de D tout vecteur non nul $\vec{u}$ qui possède la même direction que la droite D.



Méthode : Déterminer graphiquement un vecteur directeur d'une droite

Vidéo https://youtu.be/6VdSz-0QT4Y

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Donner des vecteurs directeurs des droites d_1, d_2, d_3 et d_4.



Pour d_1 : $\vec{a}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ou encore $\vec{c}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.
Pour d_2 : $\vec{d}\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$
Pour d_3 : $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$
Pour d_4 : $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ ou encore $\vec{w}\begin{pmatrix}0\\-8\end{pmatrix}$.

II. Équation cartésienne d'une droite

Théorème et définition :
Toute droite D admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;b) \neq (0\,;0)$.
Un vecteur directeur de D est $\vec{u}(-b\,;a)$.
Cette équation est appelée **équation cartésienne** de la droite D.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/GVDUrdsRUdA

Soit $A(x_0\,;\,y_0)$ un point de la droite D et $\vec{u}(\alpha\,;\,\beta)$ un vecteur directeur de D.

Un point M(x ; y) appartient à la droite D si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$ soit encore $\begin{vmatrix} x-x_0 & \alpha \\ y-y_0 & \beta \end{vmatrix}=0$.

Donc : $\beta(x-x_0)-\alpha(y-y_0)=0$

$\beta x-\beta x_0-\alpha y+\alpha y_0=0$

$\beta x-\alpha y+\alpha y_0-\beta x_0=0$

Cette équation peut s'écrire : $ax+by+c=0$ avec $a=\beta$ et $b=-\alpha$ et $c=\alpha y_0-\beta x_0$.
Les coordonnées de $\vec{u}$ sont donc $(\alpha\,;\,\beta)=(-b\,;a)$.

Exemple :
Soit une droite *d* d'équation cartésienne $4x-5y-1=0$.
Alors le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (5 ; 4) est un vecteur directeur de *d*.

Théorème réciproque :
L'ensemble des points M(x ; y) tels que $ax+by+c=0$ avec $(a\,;b)\neq(0\,;0)$ est une droite D de vecteur directeur $\vec{u}(-b\,;a)$.

- Admis -

Méthode : Déterminer une équation cartésienne de droite à partir d'un point et d'un vecteur directeur

Vidéo https://youtu.be/rLxQlbQkPsQ
Vidéo https://youtu.be/NosYmlLLFB4
Vidéo https://youtu.be/i5WD8IZdEqk

On considère un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan.
1) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d* passant par le point *A*(3 ; 1) et de vecteur directeur $\vec{u}$(–1 ; 5).

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite *d'* passant par les points *B*(5 ; 3) et *C*(1 ; –3).

1) Soit un point *M*(x ; y) de la droite *d*.
Les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, soit $det\left(\overrightarrow{AM}\,;\vec{u}\right)=0$ soit encore $\begin{vmatrix} x-3 & -1 \\ y-1 & 5 \end{vmatrix}=0$.
Donc : $5(x-3)-(-1)(y-1)=0$.
Ou encore : $5x+y-16=0$.
Une équation cartésienne de *d* est : $5x+y-16=0$.

Remarque :
Une autre méthode consiste à appliquer directement le premier théorème énoncé plus haut.
Ainsi, comme $\vec{u}$ (–1 ; 5) est un vecteur directeur de *d*, une équation de *d* est de la forme :

$5x + 1y + c = 0$.
Pour déterminer c, il suffit de substituer les coordonnées de *A* dans l'équation.

2) *B* et *C* appartiennent à *d'* donc $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de *d'*.
On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 1-5 \\ -3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de *d'* est de la forme : $-6x + 4y + c = 0$.
B(5 ; 3) appartient à *d'* donc : –6 x 5 + 4 x 3 + c = 0 donc c = 18.
Une équation cartésienne de *d'* est : $-6x + 4y + 18 = 0$ ou encore $3x - 2y - 9 = 0$.

Tracer une droite dans un repère :

Vidéo https://youtu.be/EchUv2cGtzo

III. Équation réduite d'une droite

1) De l'équation cartésienne à l'équation réduite

- Si $b \neq 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à une équation réduite $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Et on note $m = -\frac{a}{b}$ et $p = -\frac{c}{b}$.

Vocabulaire : - m est appelé la **pente** ou le **coefficient directeur** de la droite D.
- p est appelé l'**ordonnée à l'origine** de la droite D.

Remarque : Dans l'équation réduite, on retrouve l'expression d'une fonction affine.

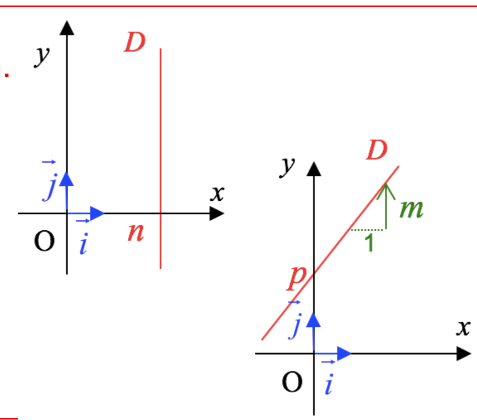
- Si $b = 0$, alors l'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ de la droite D peut être ramenée à l'équation réduite $x = -\frac{c}{a}$. Dans ce cas, la droite D est parallèle à l'axe des ordonnées.

Exemple : Soit *d* dont une droite d'équation cartésienne $4x + y - 6 = 0$.
Son équation réduite est $y = -4x + 6$.

Propriété :
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. Soit D une droite du plan.

- Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $x = n$,
où n est un nombre réel.

- Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
alors l'équation de D est de la forme $y = mx + p$,
où m et p sont deux nombres réels.



<u>Exercice :</u> Donner le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de chacune des droites d'équations : a) $y = -2x + 3$ b) $y = 5$ c) $4x + 2y = 1$

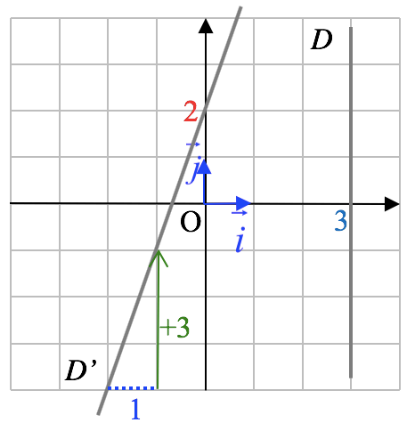
a) Coefficient directeur : –2
Ordonnée à l'origine : 3

b) Coefficient directeur : 0
Ordonnée à l'origine : 5

b) L'équation peut s'écrire : $y = -2x + \frac{1}{2}$
Coefficient directeur : –2
Ordonnée à l'origine : $\frac{1}{2}$

<u>Exemples :</u>

La droite D a pour équation $x = 3$
La droite D' a pour équation $y = 3x + 2$.
Son ordonnée à l'origine est 2 et son coefficient directeur est +3.



<u>Méthode :</u> Représenter graphiquement une droite d'équation réduite donnée

Vidéo https://youtu.be/cUdhxkaTqqk

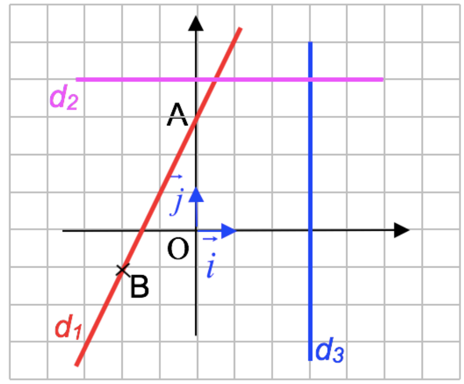
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Dans ce repère, tracer les droites d_1, d_2 et d_3 d'équations réduites respectives :
$y = 2x + 3$,
$y = 4$,
$x = 3$.

- La droite d_1 d'équation $y = 2x + 3$ a pour ordonnée à l'origine 3. Donc le point A de coordonnée $\binom{0}{3}$ appartient à la droite d_1.

Soit B le point d'abscisse –2 appartenant à la droite d_1. Les coordonnées de B vérifient l'équation de d_1, donc :
$y_B = 2\times(-2) + 3 = -1$.
Le point B de coordonnées $\binom{-2}{-1}$ appartient à la droite d_1.
On peut ainsi tracer la droite d_1 passant par A et B.

- La droite d_2 d'équation $y = 4$ est l'ensemble des points dont l'ordonnée est égale à 4. La droite d_2 est donc la droite parallèle à l'axe des abscisses coupant l'axe des ordonnées au point de coordonnées $\binom{0}{4}$.

Pour tracer la droite d_2, on aurait également pu remarquer que son coefficient directeur est nul.
- La droite d_3 d'équation $x = 3$ est l'ensemble des points dont l'abscisse est égale à 3.
La droite d_3 est donc la droite parallèle à l'axe des ordonnées coupant l'axe des abscisses au point de coordonnées $\binom{3}{0}$.



Propriété réciproque :
Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan et m, p, n trois nombres réels, m étant non nul.
L'ensemble des points M du plan dont les coordonnées $\binom{x}{y}$ sont tels que :
$y = mx + p$ ou $x = n$, est une droite.

Méthode : Vérifier si un point appartient à une droite d'équation donnée

Vidéo https://youtu.be/XA0YajthETQ

Soit $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ un repère du plan.
Les points A$\binom{6,4}{42}$ et B$\binom{346}{2419}$ appartiennent-ils à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$?

- Dire que le point A$\binom{6,4}{42}$ appartient à la droite *d* d'équation $y = 7x - 3$ revient à dire que les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite *d*.
Ce qui n'est pas le cas, puisque 42 ≠ 7 x 6,4 – 3 = 41,8.
Le point A n'appartient donc pas à la droite *d*.

- Les coordonnées de B$\binom{346}{2419}$ vérifient l'équation de la droite *d*. En effet :
2419 = 7 x 346 – 3 donc le point B appartient à la droite *d*.

Remarque : Pour démontrer que 3 points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer par exemple que le point A vérifie l'équation de la droite (BC).

Passer d'une équation cartésienne à l'équation réduite et réciproquement :

Vidéo https://youtu.be/LOW6XvpaRQg

2) Pente d'une droite

Propriété :
Si A$\binom{x_A}{y_A}$ et B$\binom{x_B}{y_B}$ sont deux points distincts d'une droite D tel que $x_A \neq x_B$ alors la droite D a pour pente (ou coefficient directeur) $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

Méthode : Déterminer une équation réduite de droite dont on connaît deux points

Vidéo https://youtu.be/tfagLy6QRuw

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Soit A$\binom{4}{-1}$ et B$\binom{3}{5}$ deux points d'une droite *d*.
Déterminer une équation de la droite *d*.

Les points A et B sont d'abscisses différentes donc la droite *d* n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées. Elle est donc de la forme $y = mx + p$, où m et p sont deux nombres réels.

Le coefficient directeur de *d* est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{5-(-1)}{3-4} = \frac{6}{-1} = -6$.

L'équation de *d* est donc de la forme : $y = -6x + p$

Comme A$\binom{4}{-1}$ appartient à la droite *d*, ses coordonnées vérifient l'équation de *d* soit :

$-1 = -6 \times 4 + p$. D'où $p = -1 + 6 \times 4 = 23$

Une équation de *d* est donc : $y = -6x + 23$.

ALGORITHME

```python
def droite(xA,yA,xB,yB):
    m=...
    p=...
    print('y=',m,'x+',p)
```

TP avec Python : Déterminer une équation de droite passant par deux points donnés
https://www.maths-et-tiques.fr/telech/Algo_EqDroite.pdf

IV. Position relative de deux droites

1) A partir l'aide de l'équation cartésienne

Propriété :
Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Vidéo https://youtu.be/NjsVdVolhvU

Démontrer que les droites d_1 et d_2 d'équations respectives $6x - 10y - 5 = 0$ et $-9x + 15y = 0$ sont parallèles.

Le vecteur $\vec{u}(10\,;6)$ est un vecteur directeur de la droite d_1.
Le vecteur $\vec{v}(-15\,;-9)$ est un vecteur directeur de la droite d_2.
Calculons $det(\vec{u}\,;\vec{v})$:

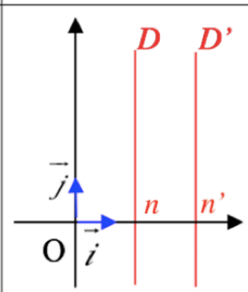
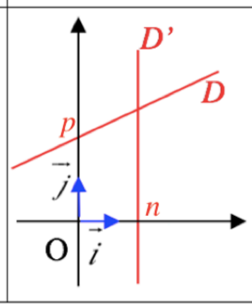
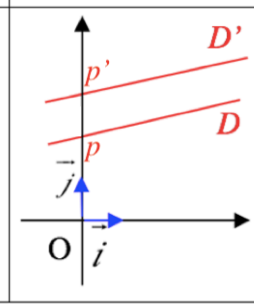
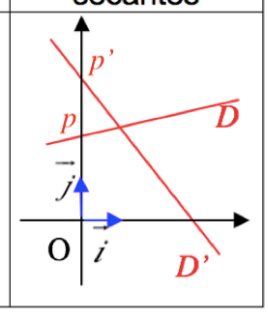
$$det(\vec{u}\,;\vec{v}) = \begin{vmatrix} 10 & -15 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 10 \times (-9) - 6 \times (-15) = 0$$

Donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

2) A l'aide de l'équation réduite

Propriété :
Soit $(O;\vec{i},\vec{j})$ un repère du plan.
Soit D et D' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.
Dire que D et D' sont parallèles entre-elles équivaut à dire qu'elles ont le même coefficient directeur.

Tableau récapitulatif :

Equation de D	$x = n$	$y = mx + p$	$y = mx + p$	
Equation de D'	$x = n'$	$x = n$	$y = m'x + p'$	
Position de D et D'	$D \,//\, D'$	D et D' sont sécantes	Si $m = m'$: $D \,//\, D'$	Si $m \neq m'$: D et D' sont sécantes
Représentation				

Vidéo https://youtu.be/gTUPGw7BuIc

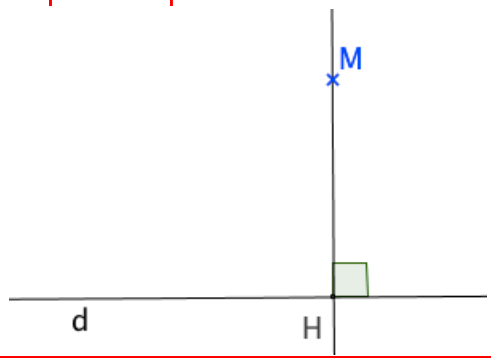
Exemples :
Dans un repère du plan, d_1, d_2 et d_3 admettent pour équations respectives :

$$y = 3x + 4,\ \ y = 3x + 9,\ x = 8$$

Les droites d_1 et d_2 sont parallèles car elles ont un coefficient directeur égal à 3.
Les droites d_1 et d_3 sont sécantes.

V. Projeté orthogonal d'un point sur une droite

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.
Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.

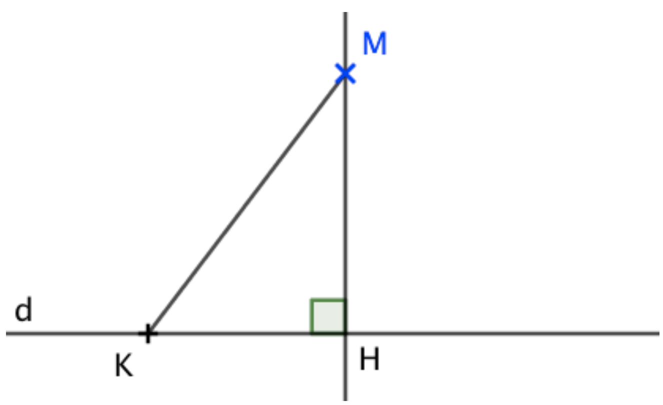


Propriété : Le projeté orthogonal du point M sur la droite *d* est le point de la droite *d* le plus proche du point M.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/DohZ0ehR_rw

Soit H le projeté orthogonal du point M sur la droite d.
Supposons qu'il existe un point K de la droite *d* plus proche de M que l'est le point H.

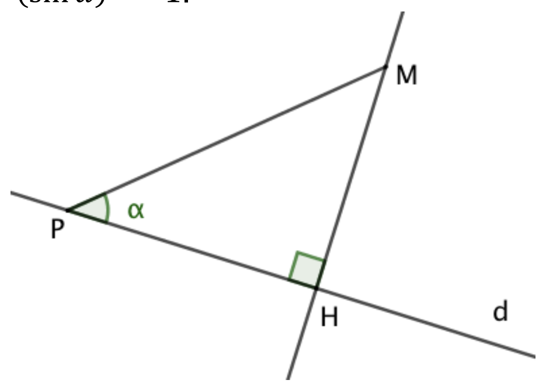


$KM \leq HM$ car K est le point de la droite le plus proche de M.
Donc $KM^2 \leq HM^2$.
Or, d'après l'égalité de Pythagore, on a : $HM^2 + HK^2 = KM^2$
Donc $HM^2 + HK^2 \leq HM^2$.
Donc $HK^2 \leq 0$. Ce qui est impossible sauf dans le cas où le point K est le point H.
On en déduit que H est le point de la droite le plus proche du point M.

Méthode : Démontrer que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$

Vidéo https://youtu.be/9r2qDd7EkMo

Soit une droite *d* et un point P appartenant à *d*.
Soit un point M n'appartenant pas à *d*.
On appelle H le projeté orthogonal du point M sur la droite *d*.
On note **α** l'angle $\widehat{MPH}$.
Démontrer que $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

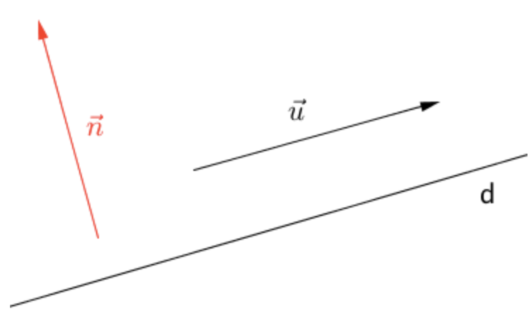


Le triangle PHM est rectangle en H, on a donc : $\cos\alpha = \frac{PH}{PM}$ soit $PH = PM \times \cos\alpha$.
De même, on a : $\sin\alpha = \frac{HM}{PM}$ soit $HM = PM \times \sin\alpha$.

D'après le théorème de Pythagore, on a : $PH^2 + HM^2 = PM^2$
Soit en remplaçant : $(PM \times \cos\alpha)^2 + (PM \times \sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit encore : $PM^2 \times (\cos\alpha)^2 + PM^2 \times (\sin\alpha)^2 = PM^2$
Soit enfin, en simplifiant : $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$.

VI. Équation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle **vecteur normal** à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.



Exemple :
Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x - 3y - 6 = 0$.
Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3\,;2)$.
Un vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n} = 0$
Soit : $3a + 2b = 0$.
a = –2 et b = 3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(-2\,;3)$ est un vecteur normal de *d*.

Propriétés : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a\,;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ où c est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ admet le vecteur $\vec{n}(a\,;b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :
- Soit un point A(x_A ; y_A) de la droite *d*.
M$(x\,;y)$ est un point de *d* si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$
Soit encore : $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$
$ax + by - ax_A - by_A = 0$.
- Si $ax + by + c = 0$ est une équation cartésienne de *d* alors $\vec{u}(-b\,;a)$ est un vecteur directeur de *d*.
Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b \times a + a \times b = 0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

Vidéo https://youtu.be/oR5QoWCiDlo

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A(-5\,;4)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}(3\,;-1)$.
Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

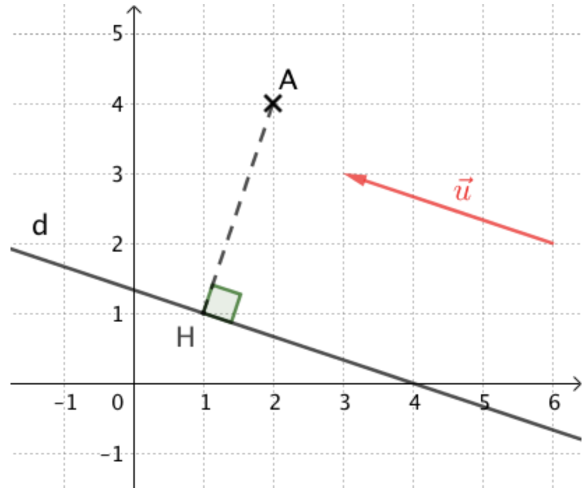
Comme $\vec{n}(3\,;-1)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x - y + c = 0$
Le point $A(-5\,;4)$ appartient à la droite *d*, donc : $3 \times (-5) - 4 + c = 0$ et donc :
$c = 19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x - y + 19 = 0$.

Méthode : Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite

Vidéo https://youtu.be/-HNUbyU72Pc

Soit la droite *d* d'équation $x + 3y - 4 = 0$ et le point A de coordonnées (2 ; 4).
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*.

- On commence par déterminer une équation de la droite (AH) :



Comme *d* et (AH) sont perpendiculaires, un vecteur directeur de *d* est un vecteur normal de (AH).
Une équation cartésienne de *d* est $x+3y-4=0$, donc le vecteur $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur directeur de *d*.
Et donc $\vec{u}(-3\,;1)$ est un vecteur normal de (AH).
Une équation de (AH) est de la forme
$-3x+y+c=0$.

Or, le point A(2 ; 4) appartient à (AH), donc ses coordonnées vérifient l'équation de la droite.
On a : $-3\times 2+4+c=0$ soit $c=2$.
Une équation de (AH) est donc : $-3x+y+2=0$.

- H est le point d'intersection de *d* et (AH), donc ses coordonnées $(x\,;y)$ vérifient les équations des deux droites. Résolvons alors le système :

$\begin{cases} x+3y-4=0 \\ -3x+y+2=0 \end{cases}$ soit $\begin{cases} x=-3y+4 \\ -3(-3y+4)+y+2=0 \end{cases}$ soit encore $\begin{cases} x=-3y+4 \\ 10y-10=0 \end{cases}$

soit enfin $\begin{cases} x=-3y+4 \\ y=\frac{10}{10}=1 \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x=-3\times 1+4=1 \\ y=1 \end{cases}$

Le point H, projeté orthogonal de A sur la droite *d*, a pour coordonnées (1 ; 1).

VII. Équations de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r est :
$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2$

Éléments de démonstration :
Tout point $M(x\,;y)$ appartient au cercle de centre $A(x_A\,;\,y_A)$ et de rayon r si et seulement $AM^2=r^2$.

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

Vidéo https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère le cercle *C* de centre $A(4\,;-1)$ et passant par le point $B(3\,;5)$.
Déterminer une équation du cercle *C*.

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle *C* :
$r^2 = AB^2 = (3-4)^2 + \left(5-(-1)\right)^2 = 37$
Une équation cartésienne du cercle *C* est alors : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

Vidéo **https://youtu.be/nNidpOAhLE8**

Dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ du plan, on considère l'ensemble E d'équation :
$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$. Démontrer que l'ensemble E est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$
$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$
$(x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 17 = 0$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$
$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 3^2$

L'ensemble E est le cercle de centre le point de coordonnées (1 ; 5) et de rayon 3.