LES NOMBRES RÉELS

PARTIE A : NOTION DE NOMBRE RÉEL

I. Nombres décimaux, nombres rationnels

Vidéo https://youtu.be/pKxTaignyHg

1. Nombres décimaux

Un nombre décimal est un nombre de la forme $\frac{a}{10^p}$, avec a entier et p entier naturel.
Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule.
L'ensemble des **nombres décimaux** est noté $\mathbb{D}$.

Exemples :
$0,56 \in \mathbb{D}$
$3 \in \mathbb{D}$
$\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$ mais $\frac{3}{4} \in \mathbb{D}$

2. Nombres rationnels

Un nombre rationnel est un nombre sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul.
L'ensemble des **nombres rationnels** est noté $\mathbb{Q}$.

Exemples :
$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$
$4 \in \mathbb{Q}$
$-4,8 \in \mathbb{Q}$
$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/SHRo1ISyIXI

Démontrons que le nombre rationnel $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal :

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\frac{1}{3}$ est décimal.
Alors il s'écrit sous la forme $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^p}$ avec a entier et p entier naturel.
Donc $10^p = 3a$ et donc 10^p est divisible par 3.
Un nombre est divisible par 3 lorsque la somme de ses chiffres est divisible par 3.
Or, ceci est impossible car la somme des chiffres de 10^p est 1, et 1 n'est pas divisible par 3.
Donc l'hypothèse posée au départ est fausse et donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal

II. Nombres réels

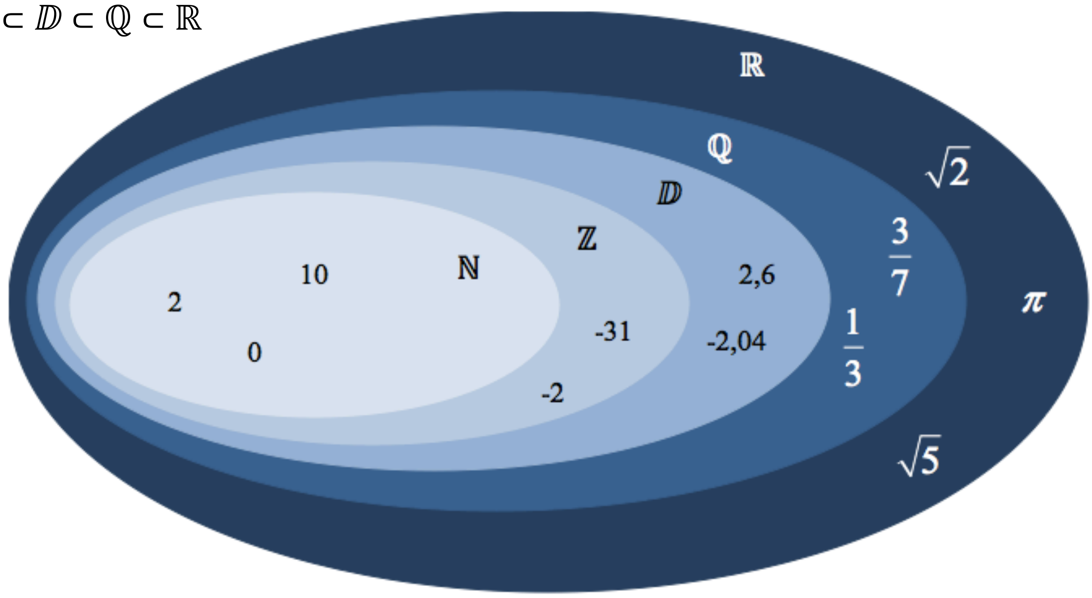
1. Définition

Un nombre est réel s'il est l'abscisse d'un point d'une droite graduée appelée la **droite numérique**.
L'ensemble des **nombres réels** est noté $\mathbb{R}$.
C'est l'ensemble de tous les nombres que nous utiliserons en classe de seconde.

Exemples :
2, 0, -5, 0.67, $\frac{1}{3}$, $\sqrt{3}$ ou π appartiennent à $\mathbb{R}$.

2. Classification des nombres

Tous les nombres de l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ appartiennent à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$.
On dit que l'ensemble $\mathbb{N}$ est inclus dans l'ensemble $\mathbb{Z}$. On note : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$.
On a également les inclusions suivantes :
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$



La classification des nombres :

Vidéo https://youtu.be/kL-eMNZiARM

3. Les nombres irrationnels

Définition : Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit irrationnel.

Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ou encore π sont des nombres irrationnels. Ils ne peuvent pas s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec a et b deux entiers relatifs, b non nul.

Comme pour un nombre rationnel, il n'est pas possible d'écrire un nombre irrationnel sous forme décimale. En effet, le nombre de décimales qui le constitue est infini mais de surcroît ces décimales se suivent sans suite logique.

Démonstration : Irrationalité de $\sqrt{2}$

On va effectuer une démonstration par l'absurde en supposant que $\sqrt{2}$ est rationnel.
Si notre démonstration aboutit à une absurdité, cela prouvera que notre hypothèse de départ est fausse.

Supposons donc que $\sqrt{2}$ est un rationnel.
Il s'écrit alors $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ avec a et b entiers naturels premiers entre eux, b non nul.
Ainsi : $\frac{a^2}{b^2} = 2$ soit $a^2 = 2b^2$.

On en déduit que a^2 est pair, ce qui entraîne que a est pair.

En effet, si a était impair, alors a^2 serait impair (voir Chapitre « Notion de multiple, diviseur et nombre premier »).

Puisque a est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$.
Comme, $a^2 = 2b^2$
On a : $(2k)^2 = 2b^2$

Soit : $4k^2 = 2b^2$

Soit encore $b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est pair, ce qui entraîne que b est pair.

Or, a et b sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément. On aboutit à une absurdité.
Donc, $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
Et donc, $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

<u>Déterminer un arrondi d'un nombre :</u>

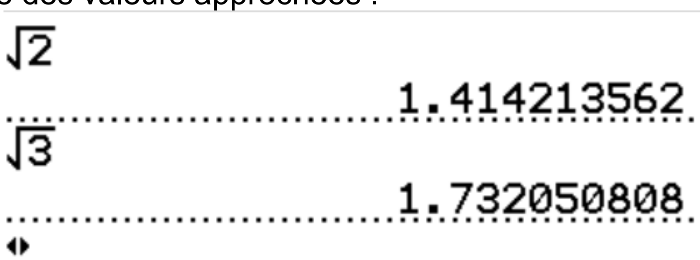
Vidéo https://youtu.be/53VOST9yJfg

<u>Méthode :</u> Donner un encadrement d'un nombre réel

Vidéo https://youtu.be/sJIXJT3fdcU

A l'aide de la calculatrice donner un encadrement à 10^{-3} de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{3}$.

La calculatrice affiche des valeurs approchées :

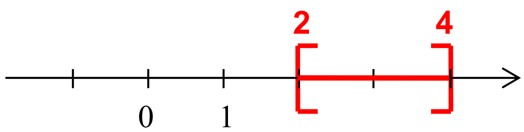


On a alors les encadrements à 10^{-3} : $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$ et $1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733$.

PARTIE B : INTERVALLES

I. <u>Notations</u>

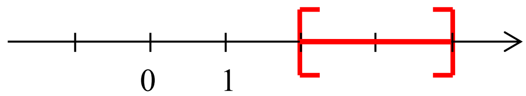
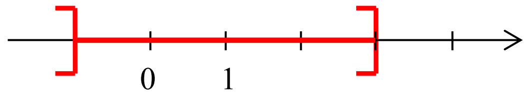
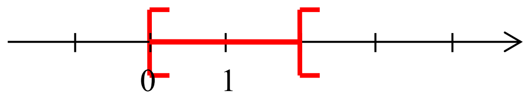
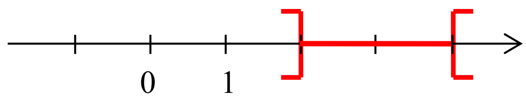
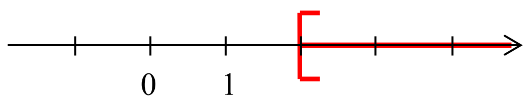
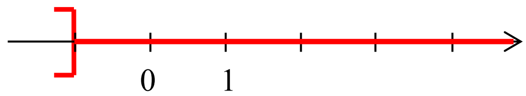
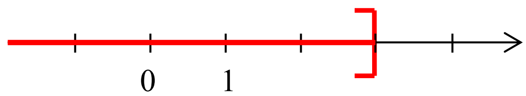
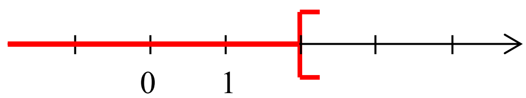
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $2 \leq x \leq 4$ peut se représenter sur une droite graduée.



Cet ensemble est appelé un intervalle et se note : [2 ; 4]
<u>Exemple :</u>
L'ensemble de tous les nombres réels x tels que $-2 \leq x \leq 7$ se note : [–2 ; 7].

On a par exemple :
$4 \in [-2 ; 7]$
$-1 \in [-2 ; 7]$
$8 \notin [-2 ; 7]$

Vidéo https://youtu.be/9MtAK7Xzrls

Nombres réels x	Notation	Représentation
$2 \leq x \leq 4$	$[2 ; 4]$	
$-1 < x \leq 3$	$]-1 ; 3]$	
$0 \leq x < 2$	$[0 ; 2[$	
$2 < x < 4$	$]2 ; 4[$	
$x \geq 2$	$[2 ; +\infty[$ ∞ désigne l'infini	
$x > -1$	$]-1 ; +\infty[$	
$x \leq 3$	$]-\infty ; 3]$	
$x < 2$	$]-\infty ; 2[$	

Remarque : L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ est un intervalle qui peut se noter $]-\infty ; +\infty[$.

II. Intervalle ouvert et intervalle fermé

Définitions :
On dit qu'un intervalle est **fermé** si ses extrémités appartiennent à l'intervalle.
On dit qu'il est **ouvert** dans le cas contraire.

Exemples :
Vidéo https://youtu.be/Il_nVCMHlu8

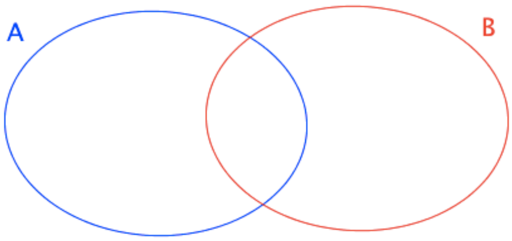
- L'intervalle $[-2 ; 5]$ est un intervalle fermé.
On a : $-2 \in [-2 ; 5]$ et $5 \in [-2 ; 5]$

- L'intervalle $]2 ; 6[$ est un intervalle ouvert.
On a : $2 \notin]2 ; 6[$ et $6 \notin]2 ; 6[$

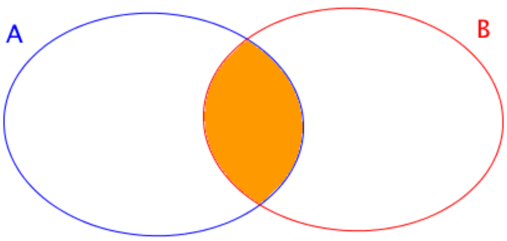
- L'intervalle $]6 ; +\infty[$ est également un intervalle ouvert.

III. Intersections et réunions d'intervalles

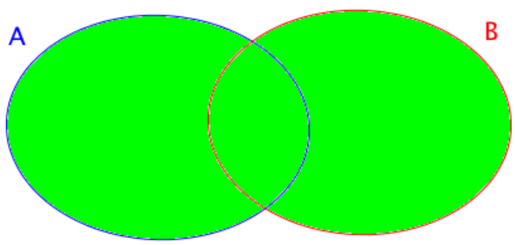
Définitions :
- L'**intersection** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B et se note $A \cap B$.
- La **réunion** de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B et se note $A \cup B$.



$A \cap B$



$A \cup B$



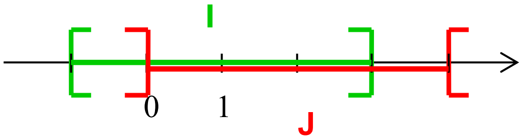
Méthode : Déterminer l'intersection et la réunion d'intervalles

Vidéo https://youtu.be/8WJG_QHQs1Y
Vidéo https://youtu.be/hzINDVy0dgg

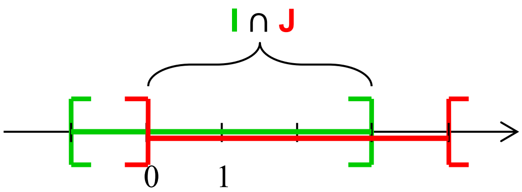
Dans les cas suivants, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J :

1) I = [–1 ; 3] et J =]0 ; 4[2) I =] –∞ ; –1] et J = [1 ; 4]

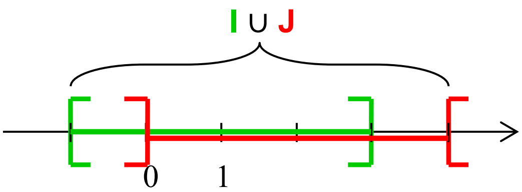
1) Pour visualiser les ensembles solutions, on peut représenter les intervalles **I** et **J** sur un même axe gradué.



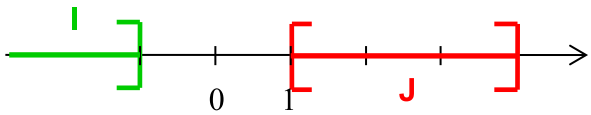
Les nombres de l'intersection des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent à la fois aux deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué où les deux ensembles se superposent. Ainsi I ∩ J =]0 ; 3].



Les nombres de la réunion des deux ensembles sont les nombres qui appartiennent au moins à l'un des deux ensembles. Il s'agit donc de la zone de l'axe gradué marquée soit par l'intervalle I soit par l'intervalle J. Ainsi I ∪ J = [–1 ; 4[.



2)



Ici, les ensembles I et J n'ont pas de zone en commun. L'intersection des deux intervalles est vide.
Un ensemble qui ne contient aucun élément s'appelle l'**ensemble vide** et se note ∅.
On a alors : I ∩ J = ∅

I ∪ J =] –∞ ; –1] ∪ [1 ; 4]