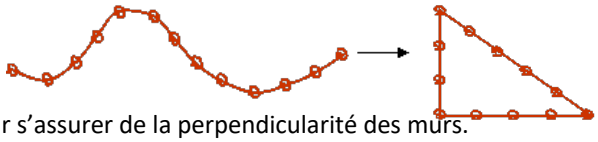
THÉORÈME DE PYTHAGORE ET THÉORÈME DE THALÈS

Partie 1 : L'égalité de Pythagore

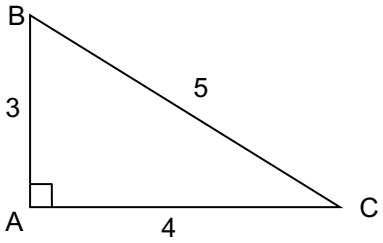
Pythagore de Samos (-569 à -475) a fondé l'école pythagoricienne (à Crotone, Italie du Sud).
Le théorème de Pythagore bien connu des élèves de 4e, n'est en fait pas une découverte de *Pythagore*, il était déjà connu par les Chinois et les babyloniens 1000 ans avant lui. Pythagore (ou ses disciples) aurait découvert la formule générale.
Les Égyptiens connaissaient aussi le théorème. Ils utilisaient la corde à 13 nœuds (régulièrement répartis) qui une fois tendue formait le triangle rectangle 3 ; 4 ; 5 et permettait d'obtenir un angle droit entre deux « longueurs ».



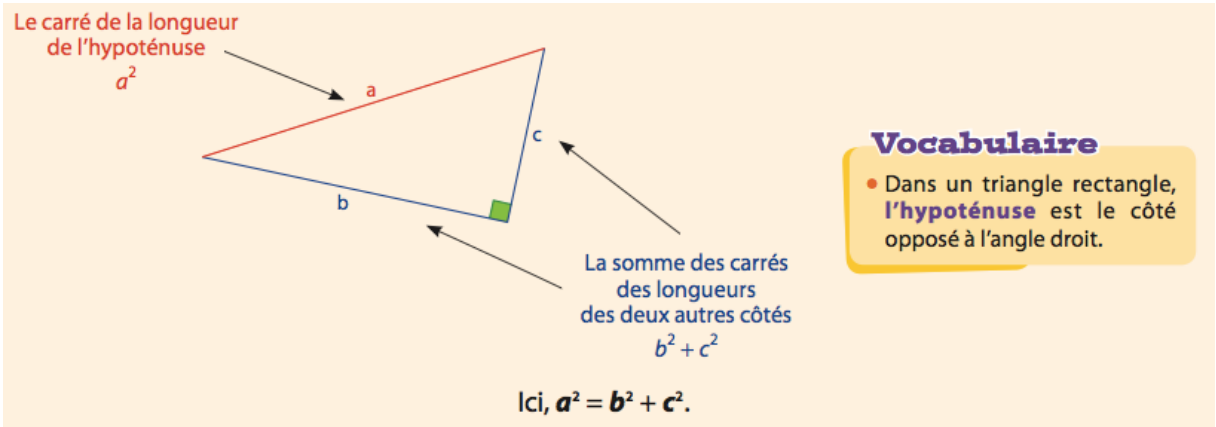
Corde qui sera encore utilisée par les maçons du XXe siècle pour s'assurer de la perpendicularité des murs.

Vidéo https://youtu.be/_6ZjpAIWNkM

Exemple :



ABC est un triangle rectangle en A,
$BC^2 = 5^2 = 25$
$AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$
On constate que $BC^2 = AB^2 + AC^2$

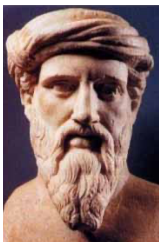


L'égalité $a^2 = b^2 + c^2$ s'appelle l'égalité de Pythagore.

Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Pythagore.ggb*

Écrire la formule : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/pyth_ecrire.pdf*

Partie 2 : Racine carrée d'un nombre



La devise pythagoricienne était « Tout est nombre » au sens de nombres rationnels (quotient de deux entiers).
L'erreur des pythagoriciens est d'avoir toujours nié l'existence des nombres irrationnels.
Par la diagonale d'un carré de côté 1, ils trouvent le nombre inexprimable $\sqrt{2}$ qui étonne puis bouleverse les pythagoriciens. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors. Cette découverte doit rester secrète pour ne pas rompre le fondement même de la Fraternité pythagoricienne jusqu'à ce qu'un des membres, *Hippase de Métaponte*, trahisse le secret. Celui-ci périra "curieusement" dans un naufrage !

x^2 ↷

5	7	6	8	3,1	2,36	2,3
25	49	36	64	9,61	5,5696	5,29

↶ $\sqrt{x}$

Par exemple :
On a : $6^2 = 36$, le nombre dont le carré est égal à 36 est 6.
On note alors : $\sqrt{36} = 6$.

Définition : La **racine carrée** de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a.
On note : $\sqrt{a}$.

Origine du symbole :
IIe siècle : l12 = côté d'un carré d'aire 12 (**l** comme latus = côté en latin)
1525, Christoph RUDOLFF, all. : *v*12 (vient du r de racine, radix en latin)
XVIe siècle, Michael STIFEL, all. : $\sqrt{12}$ (combinaison du « ***v*** » de Rudolff et de la barre « ¯ » ancêtre des parenthèses)

Racines carrées utiles à connaître :

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	

Remarque : $\sqrt{-5} = ?$
La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5 !
Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible. $\sqrt{-5}$ n'existe pas !

Méthode : Encadrer une racine carrée par deux entiers consécutifs

Vidéo https://youtu.be/bjS5LW-hgWk

Encadrer $\sqrt{20}$ par deux entiers consécutifs.

Correction

On utilise la liste des racines carrées utiles à connaître (voir plus haut) :

$\sqrt{20}$ est compris entre $\sqrt{16}$ et $\sqrt{25}$ →

$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{100} = 10$
$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{121} = 11$
$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{144} = 12$
$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{81} = 9$	

On a alors : $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$

Soit : $4 < \sqrt{20} < 5$

Méthode : Calculer la racine carrée d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/2g67qQnGgrE

Dans chaque cas, trouver un nombre qui vérifie l'égalité :

a) $x^2 = 81$ b) $y^2 = 100$ c) $z^2 = 5{,}5225$ d) $t^2 = 14$

Correction

a) $x^2 = 81$

Le nombre donc le carré est 81 est $\sqrt{81} = 9$.

Donc : $x = \sqrt{81} = 9$

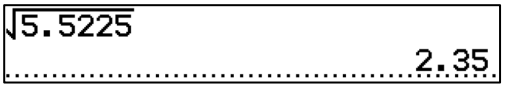
b) $y^2 = 100$ donc :

$y = \sqrt{100} = 10$

c) $z^2 = 5{,}5225$

Avec la calculatrice, on trouve :

$z = \sqrt{5{,}5225} = 2{,}35$



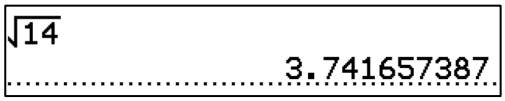
d) $t^2 = 14$

On cherche un nombre dont le carré est égal à 14.

Il n'existe pas de valeur décimale exacte dont le carré est égal à 14.

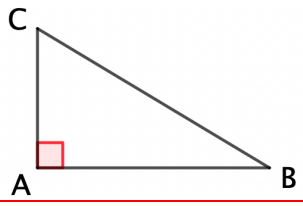
On utilise la calculatrice pour obtenir une valeur approchée du résultat.

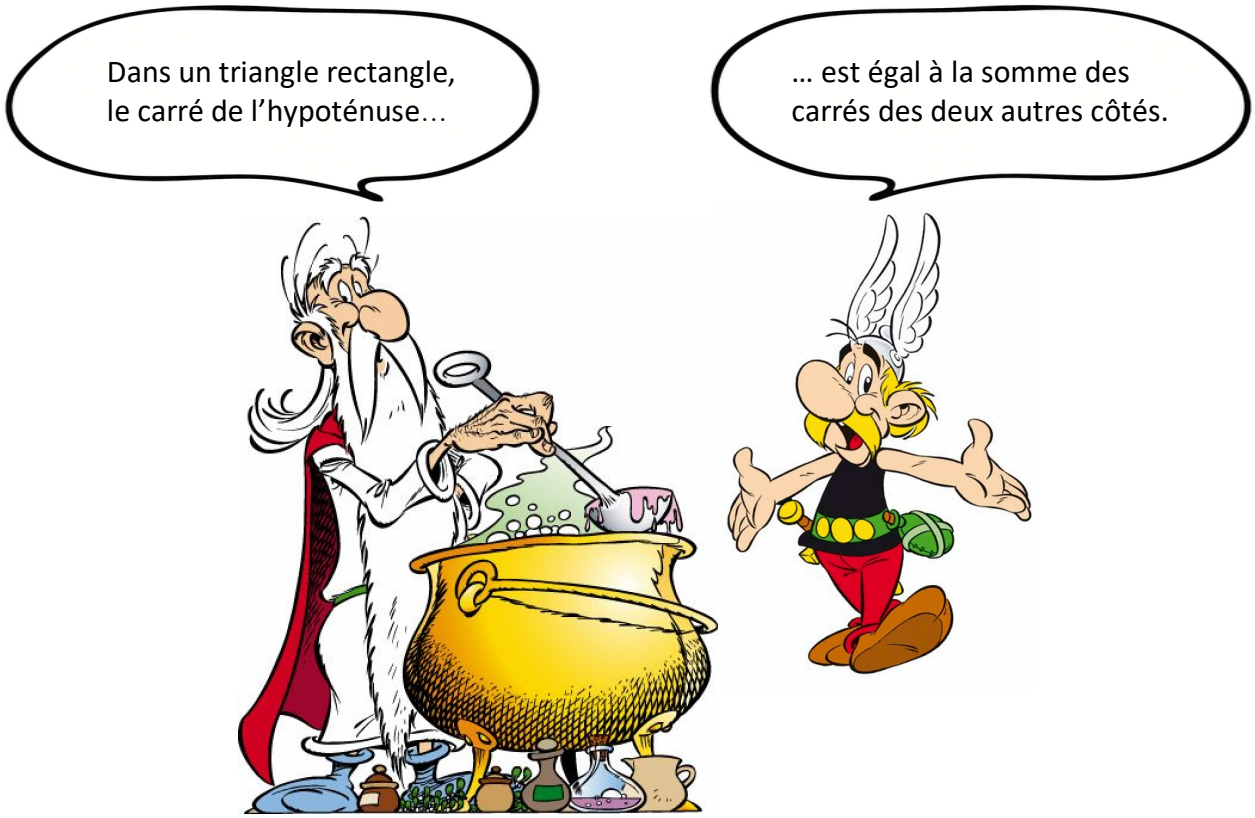
$t = \sqrt{14} \approx 3{,}74$



Partie 3 : Calculer une longueur

Théorème de Pythagore :
Si un triangle ABC est rectangle en A, alors on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



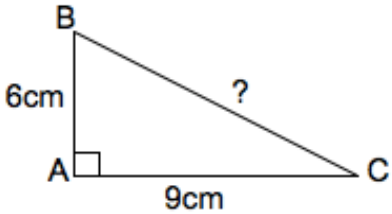


https://www.asterix.com

Méthode : Appliquer le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse

Vidéo https://youtu.be/M9sceJ8gzNc

ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 6 cm et AC = 9 cm.
Calculer BC. Donner la valeur exacte et l'arrondi au dixième de cm.



Correction

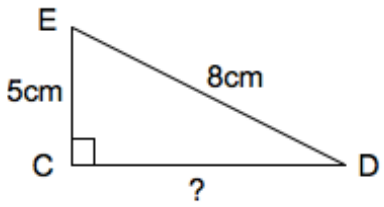
Je sais que le triangle ABC est rectangle en A.
Son hypoténuse est le côté [BC].
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$
$BC^2 = 6^2 + 9^2$
$BC^2 = 36 + 81$
$BC^2 = 117$
$BC = \sqrt{117}$ cm ← Valeur exacte
$BC \approx 10{,}8$ cm ← Valeur arrondie au dixième de cm

Méthode : Appliquer le théorème de Pythagore pour calculer la longueur d'un côté de l'angle droit

Vidéo https://youtu.be/9CIh6GGVu_w
Vidéo https://youtu.be/gBuzFW_GlGc

CDE est un triangle rectangle en C tel que CE = 5 cm et ED = 8 cm.
Calculer CD. Donner la valeur exacte et l'arrondi au dixième de cm.



Correction

Je sais que le triangle CDE est rectangle en C.
Son hypoténuse est le côté [ED].
J'utilise l'égalité de Pythagore, donc :

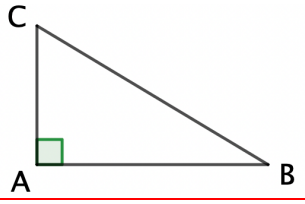
$ED^2 = CE^2 + CD^2$
$8^2 = 5^2 + CD^2$
$64 = 25 + CD^2$
$CD^2 = 64 - 25$
$CD = \sqrt{39}$ cm ← Valeur exacte
$CD \approx 6{,}2$ cm ← Valeur arrondie au dixième de cm

Partie 4 : Démontrer qu'un triangle est rectangle

Comprendre la notion de réciproque :

Vidéo https://youtu.be/qyufGYkzie8

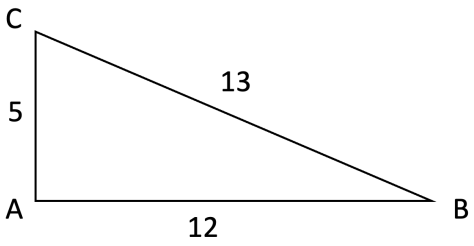
La réciproque du théorème de Pythagore :
Si, dans un triangle ABC, on a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$,
alors le triangle est rectangle en A.



Méthode : Démontrer qu'un triangle est rectangle

Vidéo https://youtu.be/puXyHcU5Awg

ABC est un triangle tel que AB = 12, AC = 5 et BC = 13.
Démontrer que le triangle est rectangle.



Correction

Si le triangle était rectangle, alors nécessairement son hypoténuse serait le plus grand côté, soit [BC].

● D'une part :
$BC^2 = 13^2 = 169$

● D'autre part :
$AB^2 + AC^2 = 12^2 + 5^2 = 169$

→ On en déduit que : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

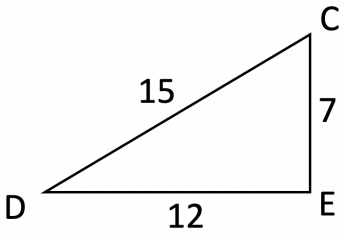
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en A.

Partie 5 : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Méthode : Démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle

Vidéo https://youtu.be/8vexpFayTbI

CDE est un triangle tel que DE = 12, CE = 7 et DC = 15.
Le triangle est-il rectangle ?



Correction
Si le triangle était rectangle, alors nécessairement son hypoténuse serait le plus grand côté, soit [DC].

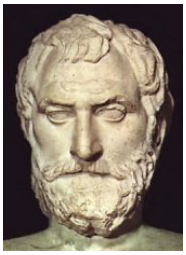
● D'une part :
$DC^2 = 15^2 = 225$

● D'autre part :
$DE^2 + CE^2 = 12^2 + 7^2 = 193$

→ On en déduit que : $DC^2 \neq DE^2 + CE^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc le triangle CDE n'est pas rectangle.

Partie 6 : Le théorème de Thalès « version triangles emboîtés »



Thalès serait né autour de 625 avant J.C. à Milet en Asie Mineure (actuelle Turquie). Considéré comme l'un des sept sages de l'Antiquité, il est à la fois mathématicien, ingénieur, philosophe et homme d'Etat mais son domaine de prédilection est l'astronomie.
Il aurait prédit avec une grande précision l'éclipse du soleil du 28 mai de l'an - 585. Ce n'est peut-être qu'une légende, Thalès en explique cependant le phénomène.
Curieusement, le fameux théorème de Thalès n'a pas été découvert par Thalès. Il était déjà connu avant lui des babyloniens et ne fut démontré qu'après lui par Euclide d'Alexandrie.

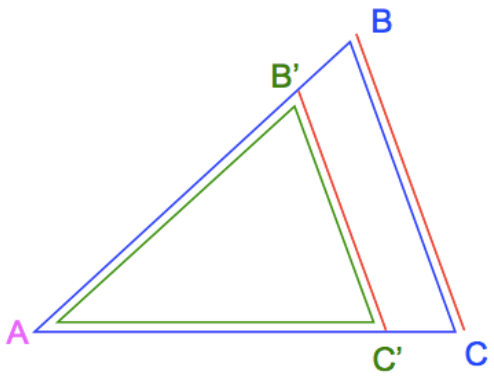
Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Thales4.ggb*

LE THÉORÈME DE THALÈS

Soit deux triangles ABC et $AB'C'$, tels que :
A, B, B' et A, C, C' sont alignés.

Si $(B'C')//(BC)$

alors : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$



Comment retenir le théorème de Thalès ?

ABC et $AB'C'$ sont deux triangles en situation de Thalès : ils ont un sommet commun A, et deux côtés parallèles $(B'C')$ et (BC).
Un triangle est un « agrandissement » de l'autre. Ils ont donc des côtés deux à deux proportionnels.
On obtient la formule de Thalès :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

← Le petit triangle $AB'C'$
← Le grand triangle ABC

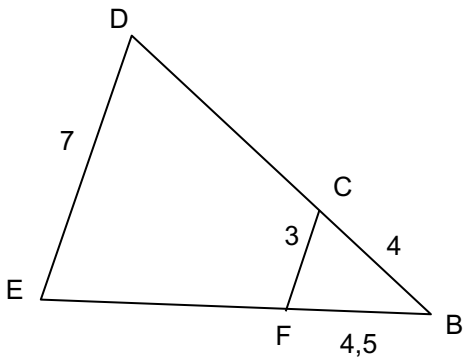
1ers côtés — 2èmes côtés — 3èmes côtés

Savoir utiliser : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/thales_ecrire.pdf*

Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Vidéo https://youtu.be/zP16D2Zrv1A

Sur la figure ci-dessous, les triangles BCF et BDE sont tels que (CF) et (DE) sont parallèles.
Calculer : a) BE b) BD
Donner la valeur exacte et éventuellement l'arrondi au dixième.



Correction

a) Les triangles BCF et BDE sont en situation de Thalès car (CF) // (DE), donc :

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BF}{BE} = \frac{CF}{DE}$$

$$\frac{4}{BD} = \frac{4{,}5}{BE} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{4{,}5}{BE} = \frac{3}{7}$$

Soit : $BE = 4{,}5 \times 7 : 3 = 10{,}5$

b) On a : $\frac{4}{BD} = \frac{4{,}5}{BE} = \frac{3}{7}$

$$\frac{4}{BD} = \frac{3}{7}$$

Soit : $BD = 4 \times 7 : 3 = \frac{28}{3}$ (Valeur exacte)

$\approx 9{,}3$ (Valeur arrondie)

Partie 7 : Le théorème de Thalès « version papillon »

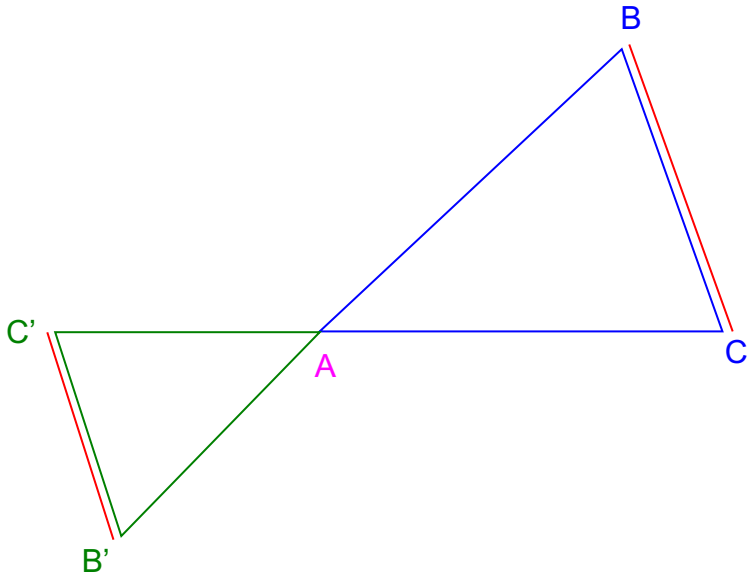
Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/Thales.ggb*

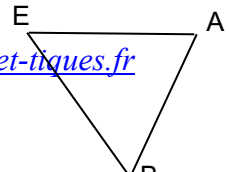
LE THÉORÈME DE THALÈS

Soit deux triangles ABC et $AB'C'$, tels que :
A, B, B' et A, C, C' sont alignés.

Si $(B'C')//(BC)$

alors : $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$





Méthode : Calculer une longueur à l'aide du théorème de Thalès

Vidéo https://youtu.be/cq3wBbXYB4A

Les triangles BAE et BDC sont tels que les droites (AE) et (CD) sont parallèles. On donne : $BE = 2\ cm$, $BD = 5\ cm$, et $CD = 6\ cm$.
Calculer AE.

Correction

Les triangles BAE et BDC sont en situation de Thalès car (AE) et (CD) sont parallèles, donc :

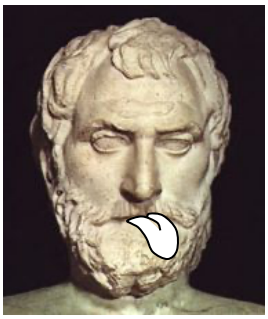
$$\frac{BA}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{CD}$$
$$\frac{BA}{BC} = \frac{2}{5} = \frac{AE}{6}$$
$$\frac{2}{5} = \frac{AE}{6}$$

Et donc $AE = 6 \times 2 : 5 = 2{,}4\ cm$.

Partie 8 : La réciproque du théorème de Thalès

Animation : *http://www.maths-et-tiques.fr/telech/RThales.ggb*

LA RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

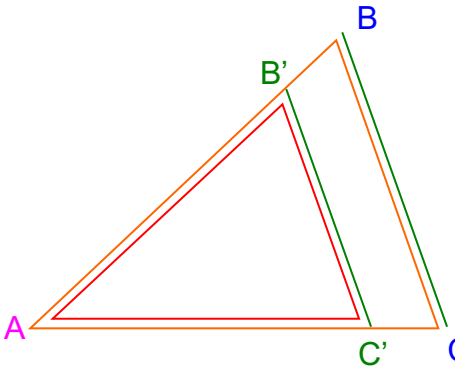


Thalès de Milet (-624 ; -546)

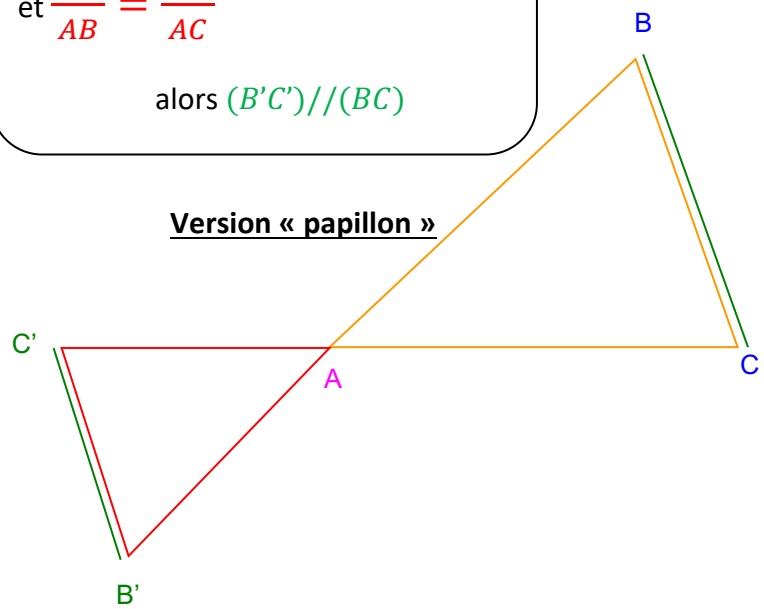
Si les points A, B, B' sont alignés dans le même ordre que les points A, C, C' et $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC}$

alors $(B'C') // (BC)$

Version « triangles emboités »



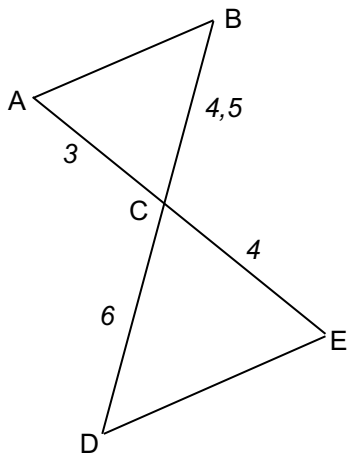
Version « papillon »



Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr

Méthode : Démontrer que deux droites sont parallèles

Vidéo https://youtu.be/uaPicwUSQz0



Sur la figure ci-contre, les points A, C, E sont alignés et les points B, C, D sont également alignés dans le même ordre.
Les droites (AB) et (DE) sont-elles parallèles ?

Correction

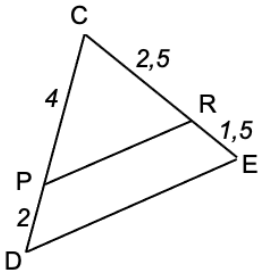
- D'une part : $\frac{CA}{CE} = \frac{3}{4} = 0{,}75$
- D'autre part : $\frac{CB}{CD} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$

Donc : $\frac{CA}{CE} = \frac{CB}{CD}$

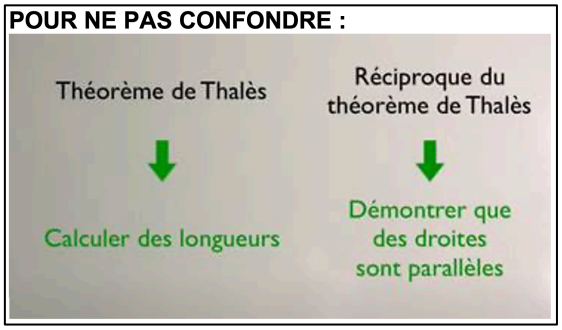
De plus les points A, C, E sont alignés dans le même ordre que les points B, C, D.
D'après la réciproque du théorème de Thalès, on peut conclure que les droites (AB) et (DE) sont parallèles.

Méthode : Démontrer que deux droites ne sont pas parallèles

Vidéo https://youtu.be/ovlhagzONlw



Les droites (PR) et (DE) sont-elles parallèles ?



Correction

- D'une part : $\frac{CP}{CD} = \frac{4}{6} \approx 0{,}67$
- D'autre part : $\frac{CR}{CE} = \frac{2{,}5}{4} = 0{,}625$

Donc : $\frac{CP}{CD} \neq \frac{CR}{CE}$

On ne peut pas utiliser la réciproque du théorème de Thalès.
(PR) et (DE) ne sont pas parallèles.

© Copyright

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales