PRODUIT SCALAIRE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

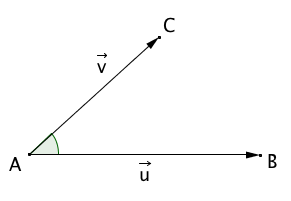
I. Définition et propriétés

1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur et deux points A et B tels que .

La **norme du vecteur** , notée , est la distance AB.

2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit et deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de par , noté , le

nombre réel défini par :

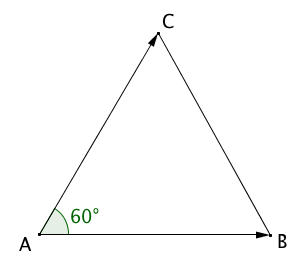
- , si l'un des deux vecteurs et est nul

- , dans le cas contraire.

se lit " scalaire ".

Remarque :

Si et sont deux représentants des vecteurs non nuls et alors :



Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide du cosinus

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CJxwKG4mvWs**](https://youtu.be/CJxwKG4mvWs)

Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

Calculer, en fonction de *a*, le produit scalaire .

=

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple est une maladresse à éviter !

3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur et , on a :

Démonstration :

On suppose que et sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs, et , on a :

1) 2) , avec *k* un nombre réel.

*- Admis -*

**Calculer un produit scalaire à l’aide de la bilinéarité :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/P0nKS-cTEO0**](https://youtu.be/P0nKS-cTEO0)

5) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs et , on a :

1)

2)

3)

Démonstration pour le 2) :

=

II. Produit scalaire et norme

1) Propriétés

Soit un vecteur, on a :

et

On a ainsi :

Propriété : Soit et deux vecteurs. On a :

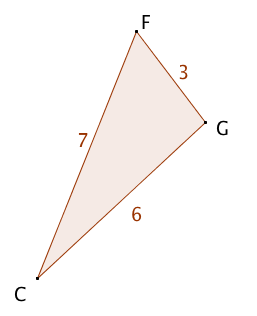
et

Démonstration de la première formule :

Donc

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

Démonstration :

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire .

= 38

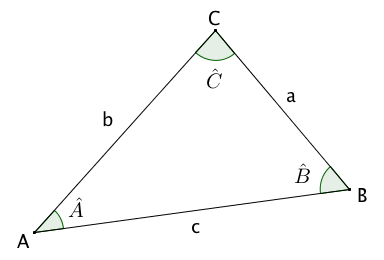
2) Théorème d'Al Kashi

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* *(1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de *2*π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

*2*π ≈ 6,283 185 307 179 586 5

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

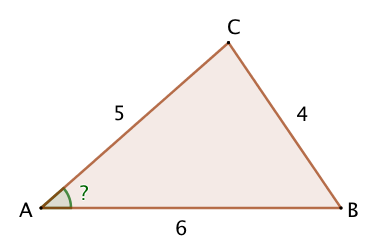


Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/34OJiQ\_4-N4**](https://youtu.be/34OJiQ_4-N4)

et

Donc :

Soit :

Soit encore :

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc**](https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc)

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l’angle au degré près.

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

III. Produit scalaire et orthogonalité

1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs et sont orthogonaux si et seulement si .

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

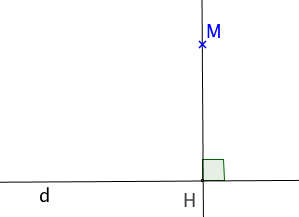
Supposons le contraire.

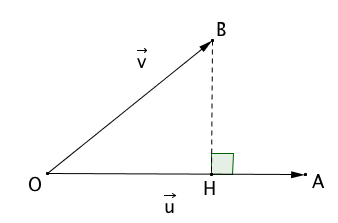
Les vecteurs et sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit et deux vecteurs non nuls

du plan tels que et .

H est le projeté orthogonal du point B sur la

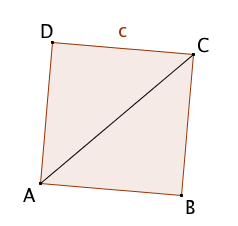
droite (OA).

On a :

Démonstration :

En effet, les vecteurs et sont orthogonaux donc .

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2eTsaa2vVnI**](https://youtu.be/2eTsaa2vVnI)

Soit un carré ABCD de côté *c*.

Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires :

a) b) c)

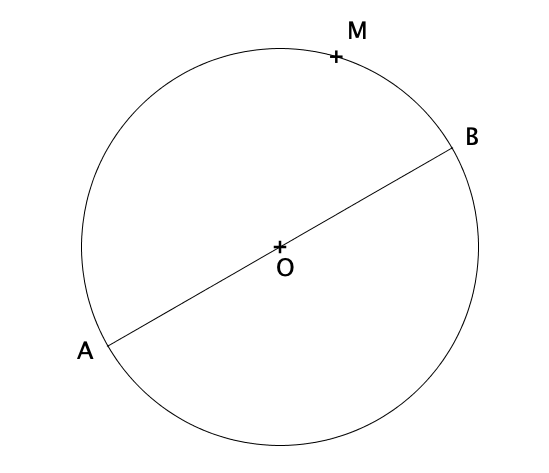
a) Par projection, on a :

b) car les vecteurs et sont orthogonaux.

c)

3) Transformation de l’expression

Propriété : L’ensemble des points M vérifiant l’égalité est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration :

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

Comme O est le milieu de [AB], on a :

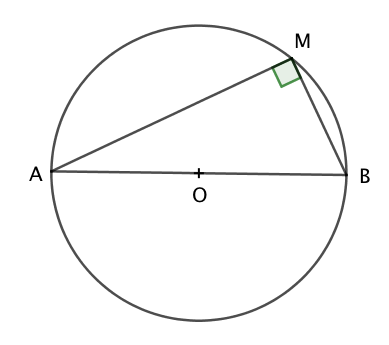
Soit :

car

Soit : soit encore .

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c’est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.



Justification : si et seulement si les vecteurs

et sont orthogonaux.

IV. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé .

Propriété : Soit et deux vecteurs de coordonnées respectives et .

On a : .

Démonstration :

car , le repère étant normé,

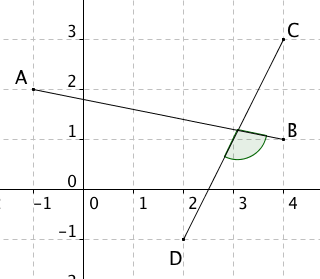
et , le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aOLRbG0IibY**](https://youtu.be/aOLRbG0IibY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ**](https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ)

Soit et deux vecteurs. Calculer



Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ca\_pW79ik9A**](https://youtu.be/ca_pW79ik9A)

Calculer la mesure de l'angle en lisant les

coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

On a :

On a également : et , donc :

5 x (–2) + (–1) x (–4) = –6

On a ainsi :

Et donc :

Et : .



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)