PRODUIT SCALAIRE



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle par le mathématicien allemand *Hermann Grassmann* (1809 ; 1877), ci-contre.

Il fut baptisé produit scalaire par *William Hamilton* (1805 ; 1865) en 1853.

I. Définition et propriétés

 1) Norme d'un vecteur

Définition : Soit un vecteur $\vec{u}$ et deux points A et B tels que $\vec{u}=\vec{AB}$.

La **norme du vecteur** $\vec{u}$, notée $\left‖\vec{u}\right‖$, est la distance AB.

 2) Définition du produit scalaire

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.

On appelle **produit scalaire** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, le

nombre réel défini par :

- $\vec{u}.\vec{v}=0$, si l'un des deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est nul

- $\vec{u}.\vec{v}=\left‖\vec{u}\right‖×\left‖\vec{v}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)$, dans le cas contraire.

$\vec{u}.\vec{v} $se lit "$\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$".

Remarque :

Si $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux représentants des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors :

$\vec{u}.\vec{v}=\vec{AB}.\vec{AC}=\left‖\vec{AB}\right‖×\left‖\vec{AC}\right‖×\cos(\hat{BAC})$



Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide du cosinus

 **Vidéo** [**https://youtu.be/CJxwKG4mvWs**](https://youtu.be/CJxwKG4mvWs)

Soit un triangle équilatéral ABC de côté *a*.

Calculer, en fonction de *a*, le produit scalaire $\vec{AB}.\vec{AC}$.

$$\vec{AB}.\vec{AC}=\left‖\vec{AB}\right‖×\left‖\vec{AC}\right‖×\cos(\hat{BAC})$$

$$=a×a×\cos(60°)$$

$$=a^{2}×0,5$$

= $\frac{a^{2}}{2}$

Attention : Le produit scalaire de deux vecteurs est un nombre réel. Écrire par exemple $\vec{u}.\vec{v}=\vec{0}$ est une maladresse à éviter !

 3) Propriété de symétrie du produit scalaire

Propriété de symétrie : Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$

Démonstration :

On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls (démonstration évidente dans la cas contraire).

$$\vec{u}.\vec{v}=\left‖\vec{u}\right‖×\left‖\vec{v}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)$$

$$=\left‖\vec{v}\right‖×\left‖\vec{u}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)$$

$$=\left‖\vec{v}\right‖×\left‖\vec{u}\right‖×cos\left(-\left(\vec{v} ; \vec{u}\right)\right)$$

$$=\left‖\vec{v}\right‖×\left‖\vec{u}\right‖×cos\left(\vec{v} ; \vec{u}\right)$$

$$=\vec{v}.\vec{u}$$

 4) Opérations sur les produits scalaires

Propriétés de bilinéarité : Pour tous vecteurs$ \vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :

1) $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$ 2) $\vec{u}.\left(k\vec{v}\right)=k\vec{u}.\vec{v}$, avec *k* un nombre réel.

*- Admis -*

**Calculer un produit scalaire à l’aide de la bilinéarité :**

 **Vidéo** [**https://youtu.be/P0nKS-cTEO0**](https://youtu.be/P0nKS-cTEO0)

 5) Identités remarquables

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

1) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)^{2}=\vec{u}^{2}+2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{2}$

2) $\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^{2}=\vec{u}^{2}-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{2}$

3) $\left(\vec{u}+\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{2}-\vec{v}^{2}$

Démonstration pour le 2) :

$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^{2}$=$\left(\vec{u}-\vec{v}\right)\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

$$=\vec{u}.\vec{u}-\vec{u}.\vec{v}-\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v}$$

$$=\vec{u}^{2}-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{2}$$

II. Produit scalaire et norme

 1) Propriétés

Soit un vecteur$ \vec{u}$, on a :

$\vec{u}.\vec{u}=\left‖\vec{u}\right‖×\left‖\vec{u}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{u}\right)=\left‖\vec{u}\right‖^{2}×\cos(0=\left‖\vec{u}\right‖^{2})$ et $\vec{u}.\vec{u}=\vec{u}^{2}$

On a ainsi : $\vec{u}^{2}=\vec{u}.\vec{u}=\left‖\vec{u}\right‖^{2}$

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On a :

$\vec{u}.\vec{v}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(\left‖\vec{u}\right‖^{2}+\left‖\vec{v}\right‖^{2}-\left‖\vec{u}-\vec{v}\right‖^{2}\right)$ et $\vec{u}.\vec{v}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(\left‖\vec{u}+\vec{v}\right‖^{2}-\left‖\vec{u}\right‖^{2}-\left‖\vec{v}\right‖^{2}\right)$

Démonstration de la première formule :

$$\left‖\vec{u}-\vec{v}\right‖^{2}=\left(\vec{u}-\vec{v}\right)^{2}$$

$$=\vec{u}^{2}-2\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}^{2}$$

$$=\left‖\vec{u}\right‖^{2}-2\vec{u}.\vec{v}+\left‖\vec{v}\right‖^{2}$$

Donc $\vec{u}.\vec{v}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(\left‖\vec{u}\right‖^{2}+\left‖\vec{v}\right‖^{2}-\left‖\vec{u}-\vec{v}\right‖^{2}\right)$

Propriété : Soit A, B et C trois points du plan. On a :

$\vec{AB}.\vec{AC}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(AB^{2}+AC^{2}-BC^{2}\right)$

Démonstration :

$\vec{AB}.\vec{AC}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(\left‖\vec{AB}\right‖^{2}+\left‖\vec{AC}\right‖^{2}-\left‖\vec{AB}-\vec{AC}\right‖^{2}\right)$

$=$ $\frac{1}{2}$ $\left(AB^{2}+AC^{2}-\left‖\vec{CB}\right‖^{2}\right)$

$=$ $\frac{1}{2}$ $\left(AB^{2}+AC^{2}-BC^{2}\right)$

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des normes

On considère la figure ci-contre, calculer le produit scalaire $\vec{CG}.\vec{CF}$.

$\vec{CG}.\vec{CF}=\frac{1}{2}$ $\left(CG^{2}+CF^{2}-GF^{2}\right)$

$=$ $\frac{1}{2}$ $\left(6^{2}+7^{2}-3^{2}\right)$

= 38

 2) Théorème d'Al Kashi

A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi* *(1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.

Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de *2*π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :

*2*π ≈ 6,283 185 307 179 586 5

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos(\hat{A})$$



Démonstration :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/34OJiQ\_4-N4**](https://youtu.be/34OJiQ_4-N4)

$$\vec{AB}.\vec{AC}=AB×AC×\cos(\hat{A})=bc\cos(\hat{A})$$

et

$\vec{AB}.\vec{AC}=$ $\frac{1}{2}$ $\left(AB^{2}+AC^{2}-BC^{2}\right)=$ $\frac{1}{2}$ $\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)$

Donc : $\frac{1}{2}$ $\left(b^{2}+c^{2}-a^{2}\right)= bc\cos(\hat{A})$

Soit : $b^{2}+c^{2}-a^{2}=2 bc\cos(\hat{A})$

Soit encore : $a^{2}=b^{2}+c^{2}-2bc\cos(\hat{A})$

Méthode : Appliquer le théorème d’Al Kashi

 **Vidéo** [**https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc**](https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc)

On considère la figure ci-contre, calculer la mesure de l’angle $\hat{BAC}$ au degré près.

D’après le théorème d’Al Kashi, on a :

$$CB^{2}=AB^{2}+AC^{2}-2×AB×AC×\cos(\hat{BAC})$$

$$4^{2}=6^{2}+5^{2}-2×6×5×\cos(\hat{BAC})$$

$$16=36+25-60\cos(\hat{BAC})$$

$$60\cos(\hat{BAC})=36+25-16$$

$$60\cos(\hat{BAC})=45$$

$\cos(\hat{BAC})=$ $\frac{45}{60}$

$\cos(\hat{BAC})=$ $\frac{3}{4}$

$$\hat{BAC}≈41°$$

III. Produit scalaire et orthogonalité

 1) Vecteurs orthogonaux

Propriété : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v}=0$.

Démonstration :

Si l'un des vecteurs est nul, la démonstration est évidente.

Supposons le contraire.

$$\vec{u}.\vec{v}=0$$

$$⟺\left‖\vec{u}\right‖×\left‖\vec{v}\right‖×cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$$

$$⟺cos\left(\vec{u} ; \vec{v}\right)=0$$

$⟺$ Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux

2) Projection orthogonale

Définition : Soit une droite *d* et un point M du plan.

Le **projeté orthogonal** du point M sur la droite *d* est le point d'intersection H de la droite *d* avec la perpendiculaire à *d* passant par M.



Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls

du plan tels que $\vec{u}=\vec{OA}$ et $\vec{v}=\vec{OB}$.

H est le projeté orthogonal du point B sur la

droite (OA).

On a : $\vec{u}.\vec{v}=\vec{OA}.\vec{OB}=\vec{OA}.\vec{OH}$

Démonstration :

$$\vec{OA}.\vec{OB}=\vec{OA}.\left(\vec{OH}+\vec{HB}\right)$$

$$=\vec{OA}.\vec{OH}+\vec{OA}.\vec{HB}$$

$$=\vec{OA}.\vec{OH}$$

En effet, les vecteurs $\vec{OA}$ et $\vec{HB}$ sont orthogonaux donc $\vec{OA}.\vec{HB}=0$.

Méthode : Calculer un produit scalaire par projection

 **Vidéo** [**https://youtu.be/2eTsaa2vVnI**](https://youtu.be/2eTsaa2vVnI)

Soit un carré ABCD de côté *c*.

Calculer, en fonction de *c*, les produits scalaires :

a) $\vec{AB}.\vec{AC}$ b) $\vec{AB}.\vec{AD}$ c) $\vec{AD}.\vec{CB}$

a) Par projection, on a :

$$\vec{AB}.\vec{AC}=\vec{AB}.\vec{AB}=\left‖\vec{AB}\right‖^{2}=c^{2}$$

b) $\vec{AB}.\vec{AD}=0$ car les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont orthogonaux.

c) $\vec{AD}.\vec{CB}=\vec{AD}.\vec{DA}=-\left‖\vec{AD}\right‖^{2}=-c^{2}$

 3) Transformation de l’expression $\vec{MA}.\vec{MB}$

Propriété : L’ensemble des points M vérifiant l’égalité $\vec{MA}.\vec{MB}=0$ est le cercle de diamètre [AB].

Démonstration :

Soit O le milieu du segment [AB].

On a :

$$\vec{MA}.\vec{MB}=0$$

$$⟺\left(\vec{MO}+\vec{OA}\right).\left(\vec{MO}+\vec{OB}\right)=0$$

Comme O est le milieu de [AB], on a : $\vec{OB}=-\vec{OA}$

Soit :

$$\left(\vec{MO}+\vec{OA}\right).\left(\vec{MO}-\vec{OA}\right)=0$$

$⟺\vec{MO}^{2}-\vec{OA}^{2}=0 $ car $\left(\vec{u}+\vec{v}\right).\left(\vec{u}-\vec{v}\right)=\vec{u}^{2}-\vec{v}^{2}$

$$⟺MO^{2}-OA^{2}=0$$

Soit : $MO^{2}=OA^{2}$ soit encore $MO=OA$.

M appartient donc au cercle de centre O et de rayon OA, c’est-à-dire le cercle de diamètre [AB].

Propriété : Un point M, distinct de A et B, appartient au cercle de diamètre [AB] si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M.



Justification : $\vec{MA}.\vec{MB}=0$ si et seulement si les vecteurs

$\vec{MA}$ et $\vec{MB}$ sont orthogonaux.

IV. Produit scalaire dans un repère orthonormé

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O ;\vec{i} ;\vec{j}\right)$.

Propriété : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $\left(x ;y\right)$ et $\left(x' ;y'\right)$.

On a : $\vec{u}.\vec{v}=xx^{'}+yy'$.

Démonstration :

$$\vec{u}.\vec{v}=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$$

$$=xx^{'}\vec{i}.\vec{i}+xy^{'}\vec{i}.\vec{j}+yx^{'}\vec{j}.\vec{i}+yy'\vec{j}.\vec{j}$$

$$=xx^{'}\left‖\vec{i}\right‖^{2}+xy^{'}\vec{i}.\vec{j}+yx^{'}\vec{j}.\vec{i}+yy'\left‖\vec{j}\right‖^{2}$$

$$=xx^{'}+yy'$$

car $\left‖\vec{i}\right‖=\left‖\vec{j}\right‖=1$, le repère étant normé,

et $\vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{i}=0$, le repère étant orthogonal.

Méthode : Calculer un produit scalaire à l’aide des coordonnées

 **Vidéo** [**https://youtu.be/aOLRbG0IibY**](https://youtu.be/aOLRbG0IibY)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ**](https://youtu.be/cTtV4DsoMLQ)

Soit $\vec{u}\left(5 ; -4\right)$ et $\vec{v}\left(-3 ; 7\right)$ deux vecteurs. Calculer $\vec{u}.\vec{v}$

$$\vec{u}.\vec{v}=5×\left(-3\right)+\left(-4\right)×7=-15-28=-43$$



Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

 **Vidéo** [**https://youtu.be/ca\_pW79ik9A**](https://youtu.be/ca_pW79ik9A)

Calculer la mesure de l'angle $\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right)$ en lisant les

coordonnées des points A, B, C et D dans le repère.

On a :

$$\vec{AB}.\vec{CD}=\left‖\vec{AB}\right‖×\left‖\vec{CD}\right‖×\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))$$

$$=\sqrt{\left(4-(-1)\right)^{2}+\left(2-1\right)^{2}}×\sqrt{\left(4-2\right)^{2}+\left(3-(-1)\right)^{2}}×\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))$$

$$=\sqrt{520}×\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))$$

$$=2\sqrt{130}×\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))$$

On a également : $\vec{AB}\left(5 ; -1\right)$ et $\vec{CD}\left(-2 ; -4\right)$, donc :

$\vec{AB}.\vec{CD}= $5 x (–2) + (–1) x (–4) = –6

On a ainsi : $2\sqrt{130}×\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))=-6$

Et donc : $\cos(\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right))=-$ $\frac{6}{2\sqrt{130}}$ $=-$ $\frac{3}{\sqrt{130}}$

Et : $\left(\vec{AB} ; \vec{CD}\right)≈105,3°$.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)