PGCD ET NOMBRES PREMIERS

I. PGCD de deux entiers

1) Définition et propriétés

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/sC2iPY27Ym0

Tous les diviseurs de 60 sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100
Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20
Le plus grand diviseur commun à 60 et 100 est 20. On le nomme le $PGCD$ de 60 et 100.

Définition : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On appelle $\boldsymbol{PGCD}$ de a et b le plus grand commun diviseur de a et b et note $PGCD(a\,;b)$.

Remarque :
On peut étendre cette définition à des entiers relatifs. Ainsi dans le cas d'entiers négatifs, la recherche du $PGCD$ se ramène au cas positif.
Par exemple, $PGCD(-60\,;100) = PGCD(60\,;100)$.
On a ainsi de façon générale : $PGCD(|a|\,;\,|b|) = PGCD(a\,;b)$.

Propriétés : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
a) $PGCD(a\,;0) = a$
b) $PGCD(a\,;1) = 1$
c) Si b divise a alors $PGCD(a\,;\,b) = b$

Démonstration de c :
Si b divise a alors tout diviseur de b est un diviseur de a. Donc le plus grand diviseur de b (qui est b) est un diviseur de a.

2) Algorithme d'Euclide

C'est avec *Euclide d'Alexandrie* (-320? ; -260?), que les théories sur les nombres premiers se mettent en place.
Dans « *Les éléments* » (livres VII, VIII, IX), il donne des définitions, des propriétés et démontre certaines affirmations du passé, comme l'existence d'une infinité de nombres premiers.
« Les nombres premiers sont en quantité plus grande que toute quantité proposée de nombres premiers ».
Il présente aussi la décomposition en facteurs premiers liée à la notion de $PGCD$.

Propriété : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
Soit r est le reste de la division euclidienne de a par b.
On a : $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$.

Démonstration :
On note respectivement q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b.
Si D un diviseur de b et r alors D divise $a = bq + r$ et donc D est un diviseur de a et b.
Réciproquement, si D un diviseur de a et b alors D divise $r = a - bq$ et donc D est un diviseur de b et r.
On en déduit que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et r. Et donc en particulier, $PGCD(a\,;b) = PGCD(b\,;r)$.

Méthode : Recherche de $PGCD$ par l'algorithme d'Euclide

Vidéo https://youtu.be/npG_apkI18o

Déterminer le $PGCD$ de 252 et 360.

On applique l'algorithme d'Euclide :
360 = 252 x 1 + 108
252 = 108 x 2 + 36
108 = 36 x 3 + 0
Le dernier reste non nul est 36 donc $PGCD$(252 ; 360) = 36.
En effet, d'après la propriété précédente :
$PGCD$(252 ; 360) = $PGCD$(252 ; 108) = $PGCD$(108 ; 36) = $PGCD$(36 ; 0) = 36

Il est possible de vérifier le résultat à l'aide de la calculatrice :

Avec une TI 82/83 :
Touche "MATH" puis menu "NBRE" :

```
pgcd(252,360)
                   36
```

Avec une Casio 35+ :
Touche "OPTION" puis "⇨" (=touche F6).
Choisir "Num" puis "⇨".
Et choisir "GCD".

```
GCD(252,360)
              36
```

Propriété : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur $PGCD$.

Démonstration :
On a démontré précédemment que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de b et r.

En poursuivant par divisions euclidiennes successives, on obtient une liste strictement décroissante de restes $r, r_1, r_2, r_3, \dots$ En effet, on a successivement :
$0 \leq r < b$, $0 \leq r_1 < r$, $0 \leq r_2 < r_1$, $0 \leq r_3 < r_2$, …
Il n'existe qu'un nombre fini d'entiers compris entre 0 et r.
Il existe donc un rang k tel que $r_k \neq 0$ et $r_{k+1} = 0$.
Ainsi l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs communs de r_k et 0.

A noter qu'à ce niveau ce résultat démontre le fait que dans l'algorithme d'Euclide, le dernier reste non nul est égal au $PGCD$ de a et b. En effet, $PGCD(r_k\,;0) = r_k$.

On en déduit que l'ensemble des diviseurs communs de a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de r_k.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/Iel0FUKjEcs

Chercher les diviseurs communs de 2730 et 5610 revient à chercher les diviseurs de leur $PGCD$.
A l'aide de la calculatrice, on obtient : $PGCD(2730\,;5610) = 30$.
Les diviseurs de 30 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.
Donc les diviseurs communs à 2730 et 5610 sont 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15 et 30.

Propriété : Soit a, b et k des entiers naturels non nuls.
$PGCD(ka\,;kb) = k \times PGCD(a\,;b)$

Démonstration :
En appliquant l'algorithme d'Euclide, on obtient successivement :
$$PGCD(ka\,;kb) = PGCD(kb\,;kr) = PGCD(kr\,;kr_1) = PGCD(kr_1\,;kr_2) = \cdots$$
$$= PGCD(kr_k\,;0) = kr_k = k \times PGCD(a\,;b)$$

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/EIcXmEi_HPs

Chercher le $PGCD$ de 420 et 540 revient à chercher le $PGCD$ de 21 et 27.
En effet, 420 = 2 x 10 x 21 et 540 = 2 x 10 x 27.
Or $PGCD(21\,;27) = 3$ donc $PGCD(420\,;540) = 2 \times 10 \times 3 = 60$.

II. Théorème de Bézout et théorème de Gauss

1) Nombres premiers entre eux

Définition : Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
On dit que a et b sont **premiers entre eux** lorsque leur $PGCD$ est égal à 1.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/Rno1eANN7aY

42 et 55 sont premiers entre eux en effet $PGCD(42 ; 55) = 1$.

2) Théorème de Bézout

<u>Propriété (Identité de Bézout) :</u> Soit a et b deux entiers naturels non nuls et d leur $PGCD$.
Il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = d$.

<u>Démonstration :</u>
On appelle *E* l'ensemble des entiers strictement positifs de la forme $am + bn$ avec m et n entiers relatifs.
a et $-a$ appartiennent par exemple à *E* donc *E* est non vide et *E* contient un plus petit élément strictement positif noté d.

- Démontrons que $PGCD(a\,;b) \leq d$:
$PGCD(a\,;b)$ divise a et b donc divise d et donc $PGCD(a\,;b) \leq d$.

- Démontrons que $d \leq PGCD(a\,;b)$:
On effectue la division euclidienne de a par d :
Il existe un unique couple d'entiers $(q\,;r)$ tel que $a = dq + r$ avec $0 \leq r < d$
On a alors :
$r = a - dq = a - (au + bv)q = a - auq - bvq = (1 - uq)a - vqb$
Donc r est un élément de *E* plus petit que d ce qui est contradictoire et donc $r = 0$.
On en déduit que d divise a. On montre de même que d divise b et donc $d \leq PGCD(a\,;b)$.

On conclut que $d = PGCD(a\,;b)$ et finalement, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = PGCD(a\,;b)$.

<u>Exemple :</u>
On a par exemple : $PGCD(54 ; 42) = 6$.
Il existe donc deux entiers u et v tels que : $54u + 42v = 6$.
Le couple $(-3 ; 4)$ convient. En effet : $54 \times (-3) + 42 \times 4 = 6$.

<u>Théorème de Bézout :</u> Soit a et b deux entiers naturels non nuls.
a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.

<u>Démonstration :</u>
- Si a et b sont premiers entre eux alors le résultat est immédiat d'après l'identité de Bézout.
- Supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
$PGCD(a\,;b)$ divise a et b donc divise $au + bv = 1$.
Donc $PGCD(a\,;b) = 1$. La réciproque est prouvée.

<u>Exemple :</u>
22 et 15 sont premiers entre eux.
On est alors assuré que l'équation $22x + 15y = 1$ admet un couple solution d'entiers relatifs.

Méthode : Démontrer que deux entiers sont premiers entre eux

Vidéo https://youtu.be/oJuQv8guLJk

Démontrer que pour tout entier naturel n, $2n+3$ et $5n+7$ sont premiers entre eux.

$5(2n+3)-2(5n+7)=10n+15-10n-14=1$
D'après le théorème de Bézout, avec les coefficients 5 et -2, on peut affirmer que $2n+3$ et $5n+7$ sont premiers entre eux.

Propriété : Un entier a admet un inverse modulo n, si a et n sont premiers entre eux.

Méthode : Déterminer un inverse modulo n

Vidéo https://youtu.be/PI4FaV5GZvc

a) Déterminer un inverse de 5 modulo 16.
b) En déduire les solutions de l'équation $5x \equiv 7[16]$.

a) 5 et 16 sont premiers entre eux, donc 5 admet un inverse modulo 16.
Déterminons cet inverse :
x est inverse de 5 modulo 16, si $5x \equiv 1[16]$.

Or x est nécessairement congru à l'un des entiers 0, 1, 2, 3, … ou 15 modulo 16.
Par disjonction des cas, on a :

x modulo 16	0	1	2	3	…
$5x$ modulo 16	0	5	10	–1	

On peut arrêter la recherche car si $5\times 3\equiv -1[16]$ alors $5\times(-3)\equiv 1[16]$.
Ainsi -3 est un inverse de 5 modulo 16.

b) $5x \equiv 7[16]$.
Pour « se débarrasser » du facteur 5, on va multiplier les deux membres par un inverse de 5 :
Soit : $-3\times 5x\equiv -3\times 7[16]$,
$-15x\equiv -21[16]$
$1x\equiv -21[16]$ car $-15\equiv 1[16]$.
Soit encore :
$x\equiv 11[16]$

Réciproquement :
Si $x\equiv 11[16]$ alors $5\times x\equiv 5\times 11[16]$
$5x\equiv 55[16]$
$5x\equiv 7[16]$.

On en déduit que $x\equiv 11[16]$.
Les entiers x solutions sont tous les entiers de la forme $11+16k$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

3) Théorème de Gauss

Théorème de Gauss : Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux alors a divise c.

Démonstration :
a divise bc donc il existe un entier k tel que $bc = ka$.
a et b sont premiers entre eux donc il existe deux entiers relatifs u et v tels que :
$au + bv = 1$.
Soit : $acu + bcv = c$ soit encore $acu + kav = c$
Et donc $a(cu + kv) = c$
On en déduit que a divise c.

Corollaire : Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.
Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux alors ab divise c.

Démonstration :
a et b divisent c donc il existe deux entiers k et k' tel que $c = ka = k'b$.
Et donc a divise $k'b$.
a et b sont premiers entre eux donc d'après le théorème de Gauss, a divise k'.
Il existe donc un entier k'' tel que $k' = ak''$.
Comme $c = k'b$, on a $c = ak''b = k''ab$
Et donc ab divise c.

Exemple :
6 et 11 divisent 660,
6 et 11 sont premiers entre eux,
donc 66 divise 660.

Remarque :
Intuitivement, on pourrait croire que la condition « a et b sont premiers entre eux » est inutile.
Prenons un contre-exemple :
6 et 9 divisent 18,
6 et 9 ne sont pas premiers entre eux,
et 6 x 9 = 54 ne divise pas 18.

Méthode : Appliquer le théorème de Gauss

Vidéo https://youtu.be/vTqqk96T_Fo

a) Soit un entier naturel n. On suppose que $5n$ est un multiple de 3. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?
b) Soit un entier naturel n multiple de 7 et de 11. Quelles sont les valeurs possibles pour n ?

a) $5n$ est un multiple de 3 donc 3 divise $5n$.
Or, 3 et 5 sont premiers entre eux, donc, d'après le théorème de Gauss, 3 divise n.
Et donc : $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$.

b) n est multiple de 7 et de 11, donc 7 et 11 divise n.
Or, 7 et 11 sont premiers entre eux, donc, d'après le corollaire du théorème de Gauss, $7 \times 11 = 77$ divise n.
Et donc : $n = 77k$, $k \in \mathbb{N}$.

Méthode : Résoudre une équation diophantienne (du type $ax + by = c$)

Vidéo https://youtu.be/0rbKnNjT3fY

a) Déterminer les entiers x et y tels que $5x + 7y = 1$.
b) Déterminer les entiers x et y tels que $5x + 7y = 12$.

a) On a : $y = \frac{1-5x}{7}$. En choisissant $x = -4$, y est entier.
Ainsi, le couple $(-4\,;3)$ est une solution particulière de l'équation.
Donc $5x + 7y = 5 \times (-4) + 7 \times 3$.
Soit $5(x + 4) = 7(3 - y)$.
5 divise $7(3 - y)$ et 5 et 7 sont premiers entre eux.
D'après le théorème de Gauss, 5 divise $3 - y$.
On prouve de même que 7 divise $x + 4$.
Il existe donc deux entiers k et k' tels que $x + 4 = 7k$ et $3 - y = 5k'$.
Réciproquement, on remplace dans l'équation $5(x + 4) = 7(3 - y)$ soit :
$5 \times 7k = 7 \times 5k'$ et donc $k = k'$.
Ainsi, les solutions sont de la forme $x = 7k - 4$ et $y = 3 - 5k$, avec k entier quelconque.

b) On a vu que : $5 \times (-4) + 7 \times 3 = 1$ donc $5 \times (-4) \times 12 + 7 \times 3 \times 12 = 12$
Soit encore : $5 \times (-48) + 7 \times 36 = 12$ et donc le couple $(-48\,;36)$ est une solution particulière de l'équation.
En appliquant la même méthode qu'à la question a, on prouve que les solutions sont de la forme $x = 7k - 48$ et $y = 36 - 5k$, avec k entier quelconque.

II. Nombres premiers

Les plus anciennes traces des nombres premiers ont été trouvées près du lac *Edouard* au *Zaïre* sur un os (de plus de 20000 ans), l'os d'*Ishango*, recouvert d'entailles marquant les nombres premiers 11, 13, 17 et 19.
Est-ce ici l'ébauche d'une table de nombres premiers ou cette correspondance est-elle due au hasard ?

1) Définition et propriétés

Définition : Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemples et contre-exemples :
- 2, 3, 5, 7 sont des nombres premiers.
- 6 n'est pas un nombre premier car divisible par 2 et 3.

- 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède qu'un seul diviseur positif.

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

Propriété : L'ensemble des nombres premiers est infini.

Démonstration :
Soit un nombre premier n quelconque. Nous allons démontrer qu'il existe un nombre premier qui lui est plus grand.
On considère le produit $2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n$ de tous les nombres premiers compris entre 2 et n.
On pose alors : $M = (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n) + 1$.

- Si M est premier alors il existe un nombre premier plus grand que n car $(2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n) + 1 > n$.
- Si M n'est pas premier :

M admet donc au moins un diviseur premier p.
Supposons que p soit compris entre 2 et n, alors p divise $2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n$. Comme p divise également $M = (2 \times 3 \times 5 \times \ldots \times n) + 1$, alors p divise *1*. Ce qui est contradictoire. Donc p est plus grand que n.
Il existe donc un nombre premier p plus grand que n.

Propriété : Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 et non premier admet un diviseur premier p tel que $p \leq \sqrt{n}$.

Démonstration :
Soit *E* l'ensemble des diviseurs de n autre que 1 et n. Cet ensemble est non vide car n n'est pas premier donc *E* admet un plus petit élément noté p.
p est premier car dans le cas contraire, p admettrait un diviseur autre que 1 et p. Ce diviseur serait plus petit que p et diviserait également n ce qui contredit le fait que p est le plus petit élément de *E*.
On peut écrire que $n = pq$ avec $p \leq q$ car p est le plus petit élément de *E*.
Donc $p \times p \leq p \times q = n$ et donc $p \leq \sqrt{n}$.

Remarque :
Pour savoir si un nombre n est premier ou non, la recherche de diviseurs peut s'arrêter au dernier entier premier inférieur à $\sqrt{n}$.

Méthode : Déterminer si un nombre est premier ou non

391 est-il premier ?

Pour le vérifier, on teste la divisibilité par tous les nombres premiers inférieurs à $\sqrt{391} \approx 19,8$.
Soit : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.
Les critères de divisibilités connus en classe du collège permettent de vérifier facilement que 391 n'est pas divisible par 2, 3 et 5.
En vérifiant par calcul pour 7, 11, 13 et 17, on constate que 391 : 17 = 23.
On en déduit que 391 n'est pas premier.

Pierre de Fermat (1601 ; 1665) est l'auteur de la plus célèbre conjecture des mathématiques :
« L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution avec $x, y, z > 0$ et $n > 2$ ».

Fermat prétendait en détenir une preuve étonnante, mais il inscrivit dans la marge d'un ouvrage de *Diophante d'Alexandrie* ne pas avoir assez de place pour la rédiger !!!
Il a fallu attendre trois siècles et demi pour qu'en 1995, un anglais, *Andrew Wiles*, en vienne à bout et empoche récompenses et célébrité.

2) Décomposition en facteurs premiers

Exemple : On veut décomposer 600 en produit de facteurs premiers.
$600 = 6 \times 100 = 6 \times 10^2 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5^2 = 2^3 \times 3 \times 5^2$
En effet, 2, 3 et 5 sont des nombres premiers.

Propriété : Tout entier naturel n strictement supérieur à 1 se décompose en produit de facteurs premiers.
Cette décomposition est unique à l'ordre près des facteurs.
On note $n = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_r}^{\alpha_r}$ avec $p_1, p_2, \ldots, p_r$ nombres premiers distincts et $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ entiers naturels non nuls.

Démonstration (difficile !) :

Existence :
- Si n est premier, l'existence est démontrée.
- Sinon, le plus petit diviseur p_1 de n est premier et il existe un entier naturel n_1 tel que : $n = p_1 n_1$
  - Si n_1 est premier, l'existence est démontrée.
  - Sinon, le plus petit diviseur p_2 de n_1 est premier et il existe un entier naturel n_2 tel que : $n_1 = p_2 n_2$

On réitère le processus pour obtenir une suite (n_k) décroissante et finie d'entiers naturels.
Ainsi, n se décompose en un produit de facteurs premiers du type :
$n = {p_1}^{\alpha_1} \times {p_2}^{\alpha_2} \times \ldots \times {p_r}^{\alpha_r}$.

Unicité : On effectue une démonstration par récurrence
- Initialisation : Trivial pour $n = 2$.
- Hérédité :

  - Hypothèse de récurrence :
  Supposons qu'il existe un entier k strictement supérieur à 1, tel que la propriété soit vraie pour tout entier strictement inférieur à k :
La décomposition de tout entier strictement inférieur à k en produit de facteurs premiers est unique.
  - Démontrons que : La propriété est vraie au rang k : La décomposition de k en produit de facteurs premiers est unique.

Supposons qu'il existe deux décompositions distinctes :
$k = p_1 p_2 \ldots p_r = q_1 q_2 \ldots q_s$.

Donc p_1 divise $q_1q_2 \dots q_s$ et donc il existe un entier q_i tel que p_1 et q_i ne soient pas premiers entre eux. Comme p_1 et q_i sont premiers, on a $p_1 = q_i$.
Le nombre $l = \frac{k}{p_1}$ est inférieur à k et on a :
$l = p_2p_3 \dots p_r = q_1q_2 \dots q_{i-1}q_{i+1} \dots q_r$
l qui est inférieur à k admet donc deux décompositions distinctes ce qui est contradictoire avec l'hypothèse de récurrence.

- Conclusion :

La propriété est vraie pour $n = 2$ et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n.

Propriété : Soit $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier naturel n non nul.
Tout diviseur de n admet une décomposition en produit de facteurs premiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$ pour tout $1 \leq i \leq r$.

Démonstration :
- $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$ divise $p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$
- Réciproquement, soit d un diviseur de $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_r^{\alpha_r}$.
Donc tout facteur premier de d divise n et est donc égal à $p_1, p_2, \dots$ ou p_r.
Par extension, on en déduit que d peut s'écrire $p_1^{\beta_1} \times p_2^{\beta_2} \times \dots \times p_r^{\beta_r}$ avec $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$.

Exemple :

Vidéo https://youtu.be/1WMQ-iH7-7c

600 = 2^3 x 3 x 5^2
Donc 2^2 x 3^0 x 5^1 = 20 est un diviseur de 600.

Méthode : Déterminer un $PGCD$ ou un $PPCM$*

Vidéo https://youtu.be/2bIK1KkQ1k0

** Plus Petit Commun Multiple*

a) Décomposer 17 640 et 411 600 en produits de facteurs premiers.
b) En déduire le $PGCD$ et le $PPCM$* de ces deux nombres.

a) 17 640 = 2 x 8820
= 2^2 x 4410
= 2^3 x 2205
= 2^3 x 3 x 735
= 2^3 x 3^2 x 245
= 2^3 x 3^2 x 5 x 49
= 2^3 x 3^2 x 5 x 7^2

411 600 = 2 x 205 800
= 2^2 x 102 900
= 2^3 x 51 450
= 2^4 x 25 725
= 2^4 x 3 x 8575
= 2^4 x 3 x 5 x 1715
= 2^4 x 3 x 5^2 x 343
= 2^4 x 3 x 5^2 x 7 x 49
= 2^4 x 3 x 5^2 x 7^3

b) Le $PGCD$ de 17 640 et 411 600 est donc 2^3 x 3 x 5 x 7^2 = 5880
Le $PPCM$ de 17 640 et 411 600 est donc 2^4 x 3^2 x 5^2 x 7^3 = 1 234 800

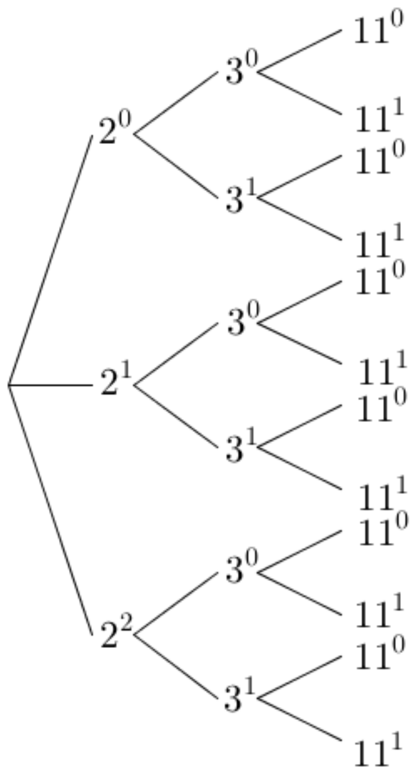
Méthode : Déterminer tous les diviseurs d'un entier

Vidéo https://youtu.be/k0rhj8fwdjs

Déterminer tous les diviseurs de 132.

On décompose 132 en produit de facteurs premiers :
132 = 2 x 66 = 2 x 2 x 33 = 2^2 x 3 x 11

On construit un arbre donnant tous les cas possibles :



En parcourant tous les chemins possibles de l'arbre, on obtient tous les diviseurs de 132.
Ainsi par exemple, 2^1 x 3^0 x 11^1 = 22 est un diviseur de 132.
L'ensemble des diviseurs de 132 est : 1, 2, 3, 4, 6, 11, 12, 22, 33, 44, 66, 132.

Remarque : La décomposition permet également de déterminer le nombre de diviseurs d'un entier. Il s'agit du produit des exposants augmentés de 1 des facteurs premiers. Cela correspond au produit des branches de chaque niveau de l'arbre.
Ainsi 132 possède (2 + 1) x (1 + 1) x (1 + 1) = 12 diviseurs.

3) Petit théorème de Fermat

Théorème : Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Corollaire : Si p est un nombre premier et si a est un entier, alors $a^p - a$ est divisible par p.

Méthode : Appliquer le petit théorème de Fermat

Vidéo https://youtu.be/dMLtO6mB5yI

Démontrer que pour tout entier naturel n, 7 divise $3^{6n} - 1$.

7 est un nombre premier et 7 est premier avec 3. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, on a :
7 divise $3^{7-1} - 1$, soit :
$3^{7-1} - 1 \equiv 0[7]$
$3^6 \equiv 1[7]$
Soit encore : $(3^6)^n \equiv 1^n[7]$
$3^{6n} \equiv 1[7]$
$3^{6n} - 1 \equiv 0[7]$
Et donc, 7 divise $3^{6n} - 1$.