

LES NOMBRES DÉCIMAUX

EVOLUTION DES CHIFFRES DE L'INDE ... A L'EUROPE

1 → 𑀓 → 𑀔 → 1
 2 → 𑀕 → 𑀖 → 2
 3 → 𑀗 → 𑀘 → 3
 4 → 𑀙 → 𑀚 → 𑀛 → 𑀜 → 4
 5 → 𑀝 → 𑀞 → 𑀟 → 𑀠 → 5
 6 → 𑀡 → 6
 7 → 𑀢 → 7
 8 → 𑀣 → 8
 9 → 𑀤 → 𑀥 → 9

Pour écrire les nombres, on utilise 10 symboles que nous appelons « chiffres » : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 0. C'est le système décimal. Nos 10 doigts en sont certainement à l'origine.

Les chiffres que nous appelons arabe ont pour origine les Indes. Ce sont les arabes qui emprunteront le **système de numération** aux Indes.

Le moine français *Gerbert d'Aurillac* (qui est devenu le pape *Sylvestre II*) les amène en Europe.

Le « 0 » qui vient aussi de l'Inde est resté longtemps ignoré ; ils l'appelaient « sūnya » = vide.

Le mathématicien italien *Léonard de Pise* dit *Fibonacci* (1180 ; 1250) introduit en Europe la **numération de position** : la valeur du chiffre varie en fonction de la place qu'il occupe dans l'écriture du nombre.

Al Kashi (1380 ; 1430), astronome à Samarkand (Asie), est à l'origine des **nombres décimaux** (nombres à virgule) mais c'est le mathématicien belge *Simon Stevin* qui se rapprochera de la notation actuelle.

Il notait par exemple le nombre 89,532 :

89.⁰5¹3²2³

C'est un progrès considérable pour effectuer des opérations par rapport à l'écriture romaine.

Le mot « virgule » vient du latin « virgula » qui désignait une petite branche.

PARTIE A : ECRITURE DES NOMBRES DÉCIMAUX

I. Numération de position

1) Rang des chiffres

Exemple : 4832,326

Millions	Centaines de mille	Dizaines de mille	Mille	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes	Dix millièmes	Cent millièmes	Millionnièmes
			4	8	3	2	,	3	2	6		
Partie entière							Partie décimale					

Dans le nombre ci-dessus :

- Bien que 4 soit inférieur à 8, la valeur du chiffre 4 est supérieure à celle du chiffre 8 dans l'écriture du nombre. C'est le principe de la numération de position.
- le nombre contient 483 232 centièmes ou encore 483 dizaines.

Méthode : Reconnaître le rang d'un chiffre dans un nombre

 Vidéo <https://youtu.be/icGHAYyXaE4>

Dans chaque cas, donner le rang du chiffre souligné :

4567 6740,56 41876,7 67,5357 87,986 6439,78

4567 : dizaine

6740,56 : unité

41876,7 : dixième

67,5357 : millième

87,986 : centième

6439,78 : centaine

2) Quelques grands nombres :

Million (1 000 000)

Quintillion (1 suivi de 30 zéros)

Décillion (1 suivi de 60 zéros)

Milliard (1 000 000 000)

Sextillion (1 suivi de 36 zéros)

Googol (1 suivi de 100 zéros)

Billion (1 000 000 000 000)

Septillion (1 suivi de 42 zéros)

Googolplex (1 suivi de Googol zéros)

Billiard (1 suivi de 15 zéros)

Octillion (1 suivi de 48 zéros)

XXe Edward Kasner USA

Trillion (1 suivi de 18 zéros)

Nonillion (1 suivi de 54 zéros)

Asankhyeya (1 suivi de 140 zéros)

Quatrillion (1 suivi de 24 zéros)

Origine bouddhiques

3) Nombres entiers et nombres décimaux

Exemples de nombres entiers : 0 ; 5 ; 7 ; 1254

Exemples de nombres décimaux : 2,5 ; 5,3 ; 0,8 ; 0,2 ; 7 ; 0

Attention aux « 0 » inutiles :

3,0600

03,3

14,0

103400

Méthode : Supprimer les « 0 » inutiles dans un nombre

 Vidéo <https://youtu.be/70UhgN2FssQ>

Dans chaque cas, supprimer les « 0 » inutiles :

45,60 089 900,450 5,080 45,00

45,60 = 45,6

089 = 89

900,450 = 900,45

5,080 = 5,08

45,00 = 45

II. Ranger les nombres

1) Comparer

On utilise les symboles : < : « ... est inférieur à ... »

> : « ... est supérieur à ... »

Les symboles sont introduits par l'anglais Thomas Harriot (XVIe)
 Dans « inférieur », on retrouve « enfer ». Ces deux mots trouvent leur origine dans la racine latine « inferus » signifiant « en bas ».

Méthode : Comparer les nombres

▶ Vidéo <https://youtu.be/fr5GemewG4Q>

Comparer les nombres : 8,32 et 8,4.

~~8,32 > 8,4~~ car ~~32 > 4~~ **C'EST FAUX !!!**
32 et 4 n'occupent le même rang dans l'écriture du nombre !

Pour comparer ces deux nombres, il peut être utile de rajouter un « 0 » inutile !
 De cette façon, les deux nombres possèdent autant de chiffres après la virgule.
 On observe ainsi que $32 < 40$

Et donc :

$$8,32 < 8,40$$

2) Ordonner

Méthode : Ordonner les nombres

▶ Vidéo <https://youtu.be/CgQBujVMjBE>

1) Ranger les nombres suivants dans l'ordre croissant (du plus petit au plus grand) :
 3 ; 2,31 ; 2,5 ; 1,9

2) Ranger les nombres suivants dans l'ordre décroissant (du plus grand au plus petit) :
 9,6 ; 8,9 ; 11 ; 8,79

$$1) 1,9 < 2,31 < 2,5 < 3$$

$$2) 11 > 9,6 > 8,9 > 8,79$$

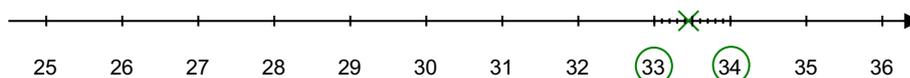
III. Encadrements

Méthode : Encadrer un nombre

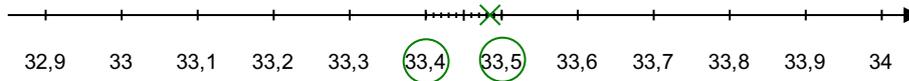
▶ Vidéo <https://youtu.be/s26CK2wO9x8>

Encadrer le nombre 33,486 à l'unité, au dixième puis au centième.

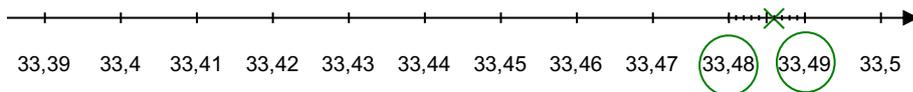
Encadrement à l'unité : $33 < 33,486 < 34$



Encadrement au dixième : $33,4 < 33,486 < 33,5$



Encadrement au centième : $33,48 < 33,486 < 33,49$



PARTIE B : CALCULS POSÉS

I. Vocabulaire

Addition : $36,3 + 43,96 = 80,26$
 Les termes La somme

Soustraction : $29,13 - 12,6 = 16,53$
 Les termes La différence

Multiplication : $844,7 \times 3,68 = 3108,496$
 Les facteurs Le produit
Facteur vient du latin « factor » = celui qui fait

II. Addition et soustraction

Méthode : Poser une addition et une soustraction

▶ Vidéo <https://youtu.be/ytLe8aUq2ZM>

▶ Vidéo <https://youtu.be/CFKUxIh6R9s>

Poser les opérations suivantes : $36,3 + 43,96$ et $29,13 - 12,6$.

$$\begin{array}{r} 11 \\ 36,30 \\ + 43,96 \\ \hline 80,26 \end{array}$$

↑ Aligner les virgules

$$\begin{array}{r} 1 \\ 29,13 \\ - 12,60 \\ \hline 16,53 \end{array}$$

↑ Aligner les virgules

III. Multiplication

Méthode : Poser une multiplication

▶ Vidéo https://youtu.be/4YQi_icWTTI

Poser $844,7 \times 3,68$.

$$\begin{array}{r}
 844,7 \\
 \times 3,68 \\
 \hline
 67576 \\
 50682 \\
 25341 \\
 \hline
 3108,496
 \end{array}$$

← 3 chiffres après la virgule

← 3 chiffres après la virgule

IV. Division euclidienne

Méthode : Poser une division euclidienne

▶ Vidéo <https://youtu.be/2Ocfhucc58g>

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 \text{Le dividende} \rightarrow 731 \\
 - 68 \\
 \hline
 051 \\
 - 34 \\
 \hline
 \text{Le reste} \rightarrow 17
 \end{array}
 &
 \begin{array}{r}
 34 \leftarrow \text{Le diviseur} \\
 \hline
 21 \leftarrow \text{Le quotient}
 \end{array}
 \end{array}$$

Le reste est toujours inférieur au diviseur.

Légende :

■ Dans 73, combien de fois 34 ? 2 fois !

■ $2 \times 34 = 68$

■ $73 - 68 = 5$ (inférieur au diviseur)

↓ On abaisse le 1

■ Dans 51, combien de fois 34 ? 1 fois !

■ $1 \times 34 = 34$

■ $51 - 34 = 17$ (inférieur au diviseur)

↓ On arrête, il n'y a plus rien à abaisser.

$$731 = 34 \times 21 + 17$$

$$\text{DIVIDENDE} = \text{DIVISEUR} \times \text{QUOTIENT} + \text{RESTE}$$

V. Division décimale

Méthode : Poser une division décimale

1) Poser $45 : 8$ et $32,12 : 4$

▶ Vidéo https://youtu.be/RbkDd_p_EVU

▶ Vidéo <https://youtu.be/kagPFHfG-ZU>

$$\begin{array}{r}
 45,000 \\
 -40 \uparrow \\
 \hline
 050 \\
 -48 \\
 \hline
 20 \\
 -16 \\
 \hline
 40 \\
 -40 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 8 \\
 \hline
 5,625
 \end{array}$$

↑ Lorsqu'on « franchit la virgule » au dividende, on rajoute une virgule au quotient.

$$\begin{array}{r}
 32,12 \\
 -32 \uparrow \\
 \hline
 001 \\
 -0 \\
 \hline
 12 \\
 -12 \\
 \hline
 0
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 4 \\
 \hline
 8,03
 \end{array}$$

2) Poser $23 : 11$. On donnera une valeur approchée au centième.

▶ Vidéo <https://youtu.be/CnuDwxwNI9k>

$$\begin{array}{r}
 23,000 \\
 -22 \uparrow \\
 \hline
 10 \\
 -00 \\
 \hline
 100 \\
 -99 \\
 \hline
 10 \\
 -00 \\
 \hline
 10
 \end{array}
 \quad \Bigg| \quad
 \begin{array}{r}
 11 \\
 \hline
 2,090 \dots
 \end{array}$$

$$23 : 11 \approx 2,09$$

II. Multiplications

Méthode :

1) Multiplier par 4 (c'est $\times 2$ puis $\times 2$)

▶ Vidéo <https://youtu.be/sgCPBw9vvsM>

$$\text{ex : } 41 \times 4 = 164$$

$\swarrow \quad \nearrow$
 $\times 2 \quad 82 \quad \times 2$

2) Multiplier par 0,5 (c'est $:2$)

▶ Vidéo <https://youtu.be/SgKpjbooXLE>

$$\text{ex : } 32 \times 0,5 = 16$$

\swarrow
 $:2$

3) Multiplier par 5 (c'est $\times 10$ puis $:2$)

▶ Vidéo <https://youtu.be/elMm61g3mSI>

$$\text{ex : } 66 \times 5 = 330$$

$\swarrow \quad \nearrow$
 $\times 10 \quad 660 \quad :2$

4) Multiplier par 10, 100, 1000, ...

▶ Vidéo <https://youtu.be/pPnCPmWGqyo>

Lorsqu'on **multiplie** un nombre par **1000**, il « **grandit** » de **3** rangs.

$$\begin{array}{ll} \text{ex : } 32 \times 1000 = 32\,000 & 12 \times 500 = 12 \times 5 \times 100 = 6000 \\ 6,3 \times 100 = 630 & 21,21 \times 10 = 212,1 \end{array}$$

5) Multiplier par 0,1, 0,01, ...

▶ Vidéo <https://youtu.be/yKXry2gyoa8>

Lorsqu'on **multiplie** un nombre par **0,001**, il « **réduit** » de **3** rangs.

$$\begin{array}{ll} \text{ex : } 312 \times 0,001 = 0,312 & 63 \times 0,01 = 0,63 \\ 1,2 \times 0,001 = 0,0012 & 21,23 \times 0,1 = 2,123 \end{array}$$

À noter : En 6^e, seule la multiplication par 0,1 est exigible.
Les multiplications par 0,01, 0,001, ... peuvent être données en exercice.

6) Grouper astucieusement les facteurs

Pour le calcul d'un produit, l'ordre des facteurs n'a pas d'importance.
Ce n'est pas vrai pour un quotient.

$$\begin{array}{l} \text{ex : } 2,5 \times 6,68 \times 4 \\ = 2,5 \times 4 \times 6,68 \\ = 10 \times 6,68 = 66,8 \end{array}$$

III. Divisions

Méthode : Calculer mentalement des divisions

1) Diviser par 4 (c'est :2 puis :2)

▶ Vidéo <https://youtu.be/TR1aTtWHJBE>

$$\text{ex : } 84 : 4 = 21$$

2) Diviser par 5 (c'est :10 puis x2)

▶ Vidéo <https://youtu.be/8jSn2qxKqpU>

$$\text{ex : } 160 : 5 = 32$$

3) Diviser par 10, 100, 1000,...

▶ Vidéo <https://youtu.be/pLIBI2V1CC4>

Lorsqu'on **divise** un nombre par 100, il « **réduit** » de **2** rangs.

$$\text{ex : } 312 : 1000 = 0,312$$

$$6,3 : 100 = 0,063$$

$$21,1 : 10 = 2,11$$

$$0,12 : 100 = 0,0012$$

IV. La distributivité

1) Formule de distributivité

« Calculer mentalement 8×101 ! On trouve 808 !

Quelle méthode permet d'obtenir ce résultat rapidement ? »

On effectue : $8 \times (100 + 1)$ et...

$$8 \times (100 + 1) = 8 \times 100 + 8 \times 1$$

Je distribue **une multiplication par 8**, c'est la distributivité.

Ainsi : $8 \times 101 = 800 + 8 = 808$

V. Ordre de grandeur

Méthode : Calculer un ordre de grandeur dans un calcul

▶ Vidéo <https://youtu.be/eWG8Fa3q-ZU>

Dans chaque cas, donner un ordre de grandeur du résultat :

a) $42,5 + 29,36$ b) $69,32 \times 103,5$ c) $79,36 - 21,2$

On remplace les termes ou les facteurs à calculer par des nombres proches et « plus simples ».

*Le résultat obtenu est une valeur proche du résultat. On l'appelle un **ordre de grandeur**.*

a) $42,5 + 29,36 \approx 40 + 30 = 70$

b) $69,32 \times 103,5 \approx 70 \times 100 = 7000$

c) $79,36 - 21,2 \approx 80 - 20 = 60$

PARTIE D : CALCUL EN LIGNE

I. Expressions sans parenthèses

Méthode : Calculer une expression sans parenthèse

▶ Vidéo <https://youtu.be/idB0-F7b1Yk>

Calculer : $A = 25 + 6 - 5 - 7$

$B = 45 : 5 \times 2 : 4$

$$\begin{aligned} A &= 25 + 6 - 5 - 7 \\ &= 31 - 5 - 7 \\ &= 26 - 7 \\ &= 19 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 45 : 5 \times 2 : 4 \\ &= 9 \times 2 : 4 \\ &= 18 : 4 \\ &= 4,5 \end{aligned}$$

Règle n°1 : En l'absence de parenthèses, on effectue les additions et les soustractions de la gauche vers la droite.

Règle n°2 : En l'absence de parenthèses, on effectue les multiplications et les divisions de la gauche vers la droite.

II. Qui a la priorité « + », « - », « x », « : » ?

Exemple : Effectuer mentalement : $3 + 7 \times 8$. On trouve : 80 !!! (C'est faux !)
Effectuer le même calcul à la calculatrice scientifique. On trouve : 59

En effet : $3 + 7 \times 8 = 3 + 56 = 59$

Règle n°3 : La multiplication est effectuée avant l'addition et la soustraction.

Règle n°4 : La division aussi !

Méthode : Calculer une expression avec des priorités (x et :)

▶ Vidéo https://youtu.be/a-IG_bjKeJc

▶ Vidéo <https://youtu.be/TJH-fiwAt5s>

Calculer : 1) $3 + 4 \times 6$ 2) $4 \times 7 - 8 : 2$ 3) $42 - 3 + 4 \times 8$

$\begin{aligned} 1) \quad & 3 + 4 \times 6 \\ & = 3 + 24 \\ & = 27 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2) \quad & 4 \times 7 - 8 : 2 \\ & = 28 - 4 \\ & = 24 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 3) \quad & 42 - 3 + 4 \times 8 \\ & = 42 - 3 + 32 \\ & = 71 \end{aligned}$
---	---	---

III. Calculs avec des parenthèses

1) Exemples :

$\begin{aligned} 1) \quad & 13 - (2 + 8) - 3 \\ & = 13 - 10 - 3 \\ & = 3 - 3 \\ & = 0 \end{aligned}$	$\begin{aligned} 2) \quad & 13 - (2 + 8 - 3) \\ & = 13 - 7 \\ & = 6 \end{aligned}$
--	--

La place des parenthèses a une importance, elles indiquent une priorité.

Règle n°5 : On commence par effectuer les calculs entre parenthèses.

Méthode : Calculer une expression avec des parenthèses

▶ Vidéo <https://youtu.be/kNOR38ZuBRc>

Calculer : $13 - (2 + 4) + 3 - (17 - 8)$

$$\begin{aligned} & 13 - (2 + 4) + 3 - (17 - 8) \quad \leftarrow \text{Règle n°4} \\ = & 13 - 6 + 3 - 9 \quad \leftarrow \text{Règle n°1} \\ = & 7 + 3 - 9 \\ = & 10 - 9 \\ = & 1 \end{aligned}$$

2) Parenthèses « doubles »

Exemple :

$$\begin{aligned} & 18 - (12 - (3 + 5)) \\ &= 18 - (12 - 8) \\ &= 18 - 4 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Règle n°6 : On commence par effectuer les parenthèses les plus intérieures.

Méthode : Calculer une expression avec des parenthèses doubles

▶ Vidéo <https://youtu.be/fCDe27qL4Ko>

▶ Vidéo <https://youtu.be/mLILNM5D66M>

Exemple à lire : Calculer : $3 \times (8 - (4 + 1))$

$$\begin{aligned} & 3 \times (8 - (4 + 1)) \longrightarrow \text{Règle n°6 : d'abord les parenthèses les plus intérieures} \\ &= 3 \times (8 - 5) \\ &= 3 \times (8 - 5) \longrightarrow \text{Règle n°5 : d'abord les parenthèses} \\ &= 3 \times 3 \\ &= 9 \end{aligned}$$

A toi de faire :

$$\begin{aligned} \text{a) } & 5 \times (14 - (2 + 1)) \\ &= 5 \times (14 - 3) \\ &= 5 \times 11 \\ &= 55 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & 10 \times (25 + (26 - 13)) \\ &= 10 \times (25 + 13) \\ &= 10 \times 38 \\ &= 380 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } & (9 - (6 + 2)) \times 95 \\ &= (9 - 8) \times 95 \\ &= 1 \times 95 \\ &= 95 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } & 5 \times ((4 + 10) - 7) \times 2 \\ &= 5 \times (14 - 7) \times 2 \\ &= 5 \times 7 \times 2 \\ &= 70 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } & (8 - 4) \times (48 - (12 \times 3)) \\ &= 4 \times (48 - 36) \\ &= 4 \times 12 \\ &= 48 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } & ((12 - 8) + 16) \times (6 + 4) \\ &= (4 + 16) \times 10 \\ &= 20 \times 10 \\ &= 200 \end{aligned}$$

3) Avec des quotients

Méthode : Calculer une expression avec des quotients

▶ Vidéo <https://youtu.be/yr1anMpCoSM>

$$\text{Calculer : } A = \frac{17+4}{10} \quad B = \frac{5}{6-4} \quad C = \frac{6}{\frac{4}{5}} \quad D = \frac{\frac{6}{4}}{5}$$

$$\begin{aligned} A &= (17 + 4) : 10 \\ &= 21 : 10 \\ &= 2,1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= 5 : (6 - 4) \\ &= 5 : 2 \\ &= 2,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C &= 6 : (4 : 5) \\ &= 6 : 0,8 \\ &= 7,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= (6 : 4) : 5 \\ &= 1,5 : 5 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

IV. Vocabulaire sur les opérations

Exemples :

a) $4 + 5$ est la somme de 4 et de 5.
4 et 5 sont les termes de cette somme.

b) $9 - 3$ est la différence de 9 par 3.
9 et 3 sont les termes de cette différence.

c) 5×8 est le produit de 5 et de 8.
5 et 8 sont les facteurs de ce produit.

d) $15 : 3$ est le quotient de 15 par 3.
15 est le dividende ; 3 est le diviseur.

Méthode : Traduire une expression en utilisant le vocabulaire sur les opérations

 Vidéo [https://youtu.be/ yF5ltbcN28](https://youtu.be/yF5ltbcN28)

Traduire par une phrase chacune des expressions suivantes :

$$A = 16 + 3 \times 5 \quad B = 30 - (2 + 7) \quad C = \frac{6}{5-3}$$

$$A = 16 + 3 \times 5$$

A est la **somme** de 16 et du **produit** de 3 par 5.

$$B = 30 - (2 + 7)$$

B est la **différence** de 30 par la **somme** de 2 et de 7.

$$C = \frac{6}{5-3}$$

C est le **quotient** de 6 par la **différence** de 5 par 3.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales