FACTORISATIONS

I. La distributivité

Factorisation : Lecture « droite ➡ gauche » de la formule de distributivité !

$$24 \times (3 + 5) = 24 \times 3 + 24 \times 5$$

Définition :
Factoriser une expression, c'est transformer une somme ou une différence en produit.

Dans la pratique, factoriser, c'est mettre en facteur en gagnant des parenthèses dans une expression.

Méthode : Appliquer la distributivité pour le calcul mental

Vidéo https://youtu.be/sr_vOR2ALhw
Vidéo https://youtu.be/BaUpx07H0NM

Calculer astucieusement :
1) 131 x 13 + 131 x 87 2) 37 x 13 - 37 x 3 3) $4x + 4 \times 5$

1) Astuce :
On reconnaît le facteur commun **131** pour appliquer la formule de distributivité de la droite vers la gauche.

131 x 13 + **131 x** 87 = **131 x** (13 + 87)
= 131 x 100 = 13100

2) **37 x** 13 – **37 x** 3 = **37 x** (13 – 3)
= 37 x 10
= 370

3) $\mathbf{4}x + \mathbf{4} \times 5 = \mathbf{4}(x + 5)$

II. Factorisations avec facteur commun

Vient du latin « Factor » = « celui qui fait »

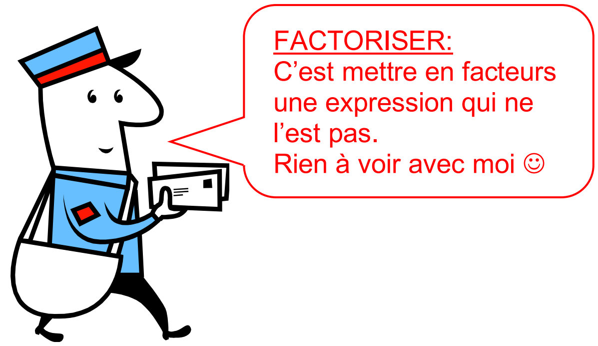
1) Introduction :

Retrouver les expressions qui sont factorisées :

$A = (2x + 1)(1 + x)$ $F = (1 + 3x)(x – 2) + 1$ $K = (x – 4) – 3(5 + 2x)$
$B = (x + 3) + (1 – 3x)$ $G = 4x – 15$ $L = (6 + x)^2 – 4(2 + 3x)$

$C = (x - 4) - 3(3 + 2x)$ $H = (8x + 4)(2x + 1)(1 + x)$ $M = (2 + 2)(3 - 4x)$
$D = 2(1 + x)$ $I = (x + 15)^2$ $N = x(x - 2)$
$E = 3(5 + x)(32 + 5x)$ $J = 4 - (x - 5)(3x - 5)$ $O = (2x + 1)^2(1 + x)$

Réponses : *A, D, E, H, I, M, N et O.*



Vidéo **https://youtu.be/FTi9WOQsq3w**

2) Le facteur commun est un nombre ou une inconnue isolée

Méthode : Factoriser un nombre ou une inconnue

Vidéo **https://youtu.be/r3AzqvgLcl8**

Pour factoriser, il faut trouver dans l'expression un facteur commun.

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire si possible :

$A = 3,5x - 4,2x + 2,1x$ $C = 4x - 4y + 8$ $E = 3t + 9u + 3$
$B = 4t - 5tx + 3t$ $D = x^2 + 3x - 5x^2$ $F = 3x - x$

$A = 3,5x - 4,2x + 2,1x$
$= x(3,5 - 4,2 + 2,1)$
$= 1,4x$

$C = 4x - 4y + 4 \times 2$
$= 4(x - y + 2)$

$E = 3t + 3 \times 3u + 3 \times 1$
$= 3(t + 3u + 1)$

$B = 4t - 5tx + 3t$
$= t(4 - 5x + 3)$
$= t(7 - 5x)$

$D = x \times x + 3x - 5x \times x$
$= x(x + 3 - 5x)$
$= x(-4x + 3)$

$F = 3x - 1x$
$= x(3 - 1)$
$= 2x$

3) Le facteur commun est une expression

Méthode : Factoriser une expression

Vidéo **https://youtu.be/5dCsR85qd3k**
Vidéo **https://youtu.be/UGTFELhE9Dw**

Trouver le facteur commun de ces expressions, puis factoriser et réduire le 2e facteur si possible :

$A = 3(2 + 3x) - (5 + 2x)(2 + 3x)$
$B = (4x - 1)(x + 6) + (4x - 1)$
$C = (1 - 6x)^2 - (1 - 6x)(2 + 5x)$
$D = 5(1 - 2x) - (4 + 3x)(2x - 1)$

Pour factoriser, il faut trouver dans chacun des termes de l'expression un facteur commun. Il s'agit ici de $2 + 3x$.

A = $3(2 + 3x) – (5 + 2x)(2 + 3x)$
= $(2 + 3x)(3 – (5 + 2x))$
= $(2 + 3x)(3 – 5 – 2x)$
= $(2 + 3x)(– 2 – 2x)$

B = $(4x – 1)(x + 6) + (4x – 1)\text{x}1$
= $(4x – 1)(x + 6 + 1)$
= $(4x – 1)(x + 7)$

C = $(1 – 6x)(1 – 6x) – (1 – 6x)(2 + 5x)$
= $(1 – 6x)((1 – 6x) – (2 + 5x))$
= $(1 – 6x)(1 – 6x – 2 – 5x)$
= $(1 – 6x)(– 11x – 1)$

Lorsque le facteur commun n'est pas immédiatement apparent, il est parfois possible de modifier l'écriture d'un des termes de l'expression pour faire apparaître un facteur commun :
D = $5(1 – 2x) – (4 + 3x)(2x – 1)$
= $5(1 – 2x) + (4 + 3x)(1 – 2x)$
= $(1 – 2x)(5 + (4 + 3x))$
= $(1 – 2x)(9 + 3x)$

III. Factorisations en appliquant une identité remarquable

Propriété : Les identités remarquables
Pour tous nombres réels a et b, on a :

DEVELOPPER →

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a – b)^2 = a^2 – 2ab + b^2$
$(a + b)(a – b) = a^2 – b^2$

← FACTORISER

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (1)

Vidéo https://youtu.be/5dCsR85qd3k
Vidéo https://youtu.be/VWKNW4aLeG8
Vidéo https://youtu.be/91ZSBiadxrA

Factoriser : A = $x^2 – 2x + 1$ B = $4x^2 + 12x + 9$ C = $9x^2 – 4$
D = $25 + 16x^2 – 40x$ E = $1 – 49x^2$ F = $12t + 4 + 9t^2$

Retrouvons les termes : a^2 b^2 $2ab$ dans les expressions

$A = x^2 - 2x + 1$ (2ème I.R. avec $a = x$ et $b = 1$)
$= (x - 1)^2$

$B = 4x^2 + 12x + 9$ (1ère I.R. avec $a = 2x$ et $b = 3$)
$= (2x + 3)^2$

$C = 9x^2 - 4$ (3ème I.R. avec $a = 3x$ et $b = 2$)
$= (3x - 2)(3x + 2)$

$D = 25 + 16x^2 - 40x$ (2ème I.R. avec $a = 5$ et $b = 4x$)
$= (5 - 4x)^2$

$E = 1 - 49x^2$ (3ème I.R. avec $a = 1$ et $b = 7x$)
$= (1 - 7x)(1 + 7x)$

$F = 12t + 4 + 9t^2$ (1ère I.R. avec $a = 2$ et $b = 3t$)
$= (2 + 3t)^2$

Méthode : Factoriser en appliquant les identités remarquables (2)

Vidéo https://youtu.be/nLRRUMRyfZg
Vidéo https://youtu.be/tO4p9TzMrls

Factoriser et réduire :

$G = (2x + 3)^2 - 64$ $H = 1 - (2 - 5x)^2$

$G = (2x + 3)^2 - 64$ (3ème I.R. avec $a = 2x + 3$ et $b = 8$)
$= ((2x + 3) - 8)((2x + 3) + 8)$
$= (2x + 3 - 8)(2x + 3 + 8)$
$= (2x - 5)(2x + 11)$

$H = 1 - (2 - 5x)^2$ (3ème I.R. avec $a = 1$ et $b = 2 - 5x$)
$= (1 - (2 - 5x))(1 + (2 - 5x))$
$= (1 - 2 + 5x)(1 + 2 - 5x)$
$= (-1 + 5x)(3 - 5x)$

IV. Second degré

1) Prérequis : Les équations du second degré

Définition : Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.
Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple :
L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

Définition : On appelle **discriminant** du trinôme $ax^2 + bx + c$, le nombre réel, noté Δ, égal à $b^2 - 4ac$.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme $ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta < 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution réelle.
- Si $\Delta = 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a une unique solution : $x_0 = \frac{-b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$: L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2) Factorisation d'un polynôme du second degré

Propriété : Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.
- Si $\Delta = 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_0)^2$.
- Si $\Delta > 0$: Pour tout réel x, on a : $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Remarque : Si $\Delta < 0$, il n'existe pas de forme factorisée de f.

Méthode : Factoriser un trinôme

Vidéo https://youtu.be/eKrZK1lisc8

Factoriser les trinômes suivants : a) $4x^2 + 19x - 5$ b) $9x^2 - 6x + 1$

a) On cherche les racines du trinôme $4x^2 + 19x - 5$:

Calcul du discriminant : $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

Les racines sont : $x_1 = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times 4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times 4} = \frac{1}{4}$

On a donc :

$$4x^2 + 19x - 5 = 4\left(x - (-5)\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+5)(4x-1)$$

b) On cherche les racines du trinôme $9x^2 - 6x + 1$:

Calcul du discriminant : $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

La racine (double) est : $x_0 = -\frac{-6}{2\times 9} = \frac{1}{3}$

On a donc :

$$9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x-1)^2.$$