DIVISIBILITÉ

Le mot « Arithmétique » vient du grec « arithmos » = nombre. En effet, l'arithmétique est la science des nombres.
Citons la célèbre conjecture de Goldbach énoncée en 1742 et à ce jour jamais démontrée :
« Tout nombre entier pair est la somme de deux nombres premiers »

I. Critères de divisibilité

- Un nombre est divisible par 2, s'il est pair (il se termine par 0, 2, 4, 6 ou 8).

Vidéo https://youtu.be/tviMPAIA-JM

Exemples : 2**6** ; 4**8** ; 10 02**4**

- Un nombre est divisible par 5, s'il se termine par 0 ou 5.

Vidéo https://youtu.be/M0f6kNnFCAg

Exemples : 85**5** ; 125**0**

- Un nombre est divisible par 10, s'il se termine par 0.

Vidéo https://youtu.be/_e-XFV-wses

Exemples : 215**0** ; 548 95**0**

- Un nombre est divisible par 4, si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est lui-même divisible par 4.

Vidéo https://youtu.be/jReCVcOWywE

Exemple : 428 8**36** (*car 36 est divisible par 4*)

- Un nombre est divisible par 3, si la somme de ses chiffres est divisible par 3.

Vidéo https://youtu.be/WVUh_b_uROk

Exemple : 532 587 (*car 5+3+2+5+8+7 = 30 et 30 est divisible par 3*)

- Un nombre est divisible par 9, si la somme de ses chiffres est divisible par 9.

Vidéo https://youtu.be/Sz8HuHAZYHQ

Exemple : 73 854 (*car 7+3+8+5+4 = 27 et 27 est divisible par 9*)

- Divisibilité par 7 (non exigible) :

Exemple : 3192 est-il divisible par 7 ?

```
 3 1 9 2    on soustrait le double de 2 à 319
-     4
 3 1 5      on soustrait le double de 5 à 31
-1 0
 2 1
```

21 est divisible par 7, donc 3192 aussi.

- Divisibilité par 11 (non exigible) :

Exemple : 61952 est-il divisible par 11 ?

```
 6 1 9 5 2    on soustrait 2 à 6195
-        2
 6 1 9 3      on soustrait 3 à 619
-      3
 6 1 6        on soustrait 6 à 61
-    6
 5 5
```

55 est divisible par 11, donc 61952 aussi.

Méthode : Appliquer les critères de divisibilité

Vidéo https://youtu.be/BJDE6uOrmYQ

Le nombre 34575 est-il divisible par 2 ? Par 3 ? Par 4 ? Par 5 ? Par 9 ? Par 10 ?

- 3457**5** n'est pas divisible par 2 car il ne se termine pas par un chiffre pair.

- 34575 est divisible par 3.
En effet, la somme de ses chiffres **3+4+5+7+5 = 24** est divisible par 3.

- 345**75** n'est pas divisible par 4 car 75 n'est pas divisible par 4.

- 3457**5** est divisible par 5 car il se termine par 5.

- 34575 n'est pas divisible par 9.
En effet, la somme de ses chiffres **3+4+5+7+5 = 24** n'est pas divisible par 9.

- 3457**5** n'est pas divisible par 10 car il ne se termine pas par 0.

II. Diviseurs, multiples

1) Exemples :

1) 15 est divisible par 3 et par 5.
On dit que 3 et 5 sont des **diviseurs** de 15.
On dit également que 15 est un **multiple** de 3 ou de 5.

2) 1074 est divisible par 3
Car 1+0+7+4 = 12 qui est divisible par 3.

Méthode : Reconnaître un multiple ou un diviseur d'un nombre

Vidéo https://youtu.be/-PLZFIAG99Q
Vidéo https://youtu.be/jteZZBzyai8

1) Parmi les nombres suivants, trouver le(s) multiple(s) de 14 : 56, 141 et 280
2) Dresser la liste des diviseurs de 28.
3) Parmi les nombres 2, 3, 5, 9 et 10, déterminer les diviseurs de 456.

1) Les multiples successifs de 14 sont : 14, 28, 42, **56**, … **140**, 154, … **280**, …
On reconnaît que 56 est un multiple de 14.
On reconnaît facilement que 140 est un multiple de 14 car 14 x 10 = 140. Donc 141 n'est pas un multiple de 14.
On reconnaît également que 280 est un multiple de 14 car 14 x 20 = 280.

On en déduit que 56 et 280 sont des multiples de 14.

2) 1, 2, 4, 7, 14, 28.
L'astuce est de les chercher par couple. Par exemple, 2 divise 28 donc 14 divise également 28 car 2 x 14 = 28.

3) 2 divise 456 car 456 est pair.
3 divise 456 car 4+5+6=15 qui est divisible par 3.
5 ne divise pas 456 car 456 ne se termine pas par 0 ou 5.
9 ne divise pas 456 car 4+5+6=15 qui n'est pas divisible par 9.
10 ne divise pas 456 car 456 ne se termine pas par 0.

2) Définition

Définition : Soit a et b deux entiers. On dit que a est un multiple de b s'il existe un entier k tel que $a = k\, b$. On dit alors que b est un diviseur de a.

Exemples et contre-exemple :
a) 15 est un multiple de 3, car $15 = k \times 3$ avec $k = 5$.
b) 10 est un diviseur de 40, car $40 = k \times 10$ avec $k = 4$.

c) Par contre, 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $13 = k \times 3$.

Propriété :
La somme de deux multiples d'un entier a est un multiple de a.

Démonstration : avec $a = 3$

Vidéo https://youtu.be/4an6JTwrJV4

Soit b et c deux multiples de 3.
Comme b est un multiple de 3, il existe un entier k_1 tel que $b = 3k_1$.
Comme c est un multiple de 3, il existe un entier k_2 tel que $c = 3k_2$.
Alors : $b + c = 3k_1 + 3k_2 = 3(k_1 + k_2) = 3k$, où $k = k_1 + k_2$.
$k = k_1 + k_2$ est un entier car somme de deux entiers, donc $b + c = 3k$ avec k entier.
$b + c$ est donc un multiple de 3.

Méthode : Résoudre un problème avec des multiples ou des diviseurs

Vidéo https://youtu.be/7nU2M-zhAjk

Montrer que la somme de trois entiers consécutifs est toujours un multiple de 3.

Soit trois entiers consécutifs qui peuvent donc s'écrire sous la forme :
n, $n + 1$ et $n + 2$, où n est un entier quelconque.
Leur somme est $S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + 1 + n + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1)$.
Soit k l'entier tel que, $k = n + 1$.

Donc $S = 3k$, avec k entier.
On en déduit que S est un multiple 3.

III. Nombres pairs, impairs

Définition : Un nombre **pair** est un multiple de 2.
Un nombre **impair** est un nombre qui n'est pas pair.

Exemples :
34, 68, 9756786 et 0 sont des nombres pairs
567, 871 et 1 sont des nombres impairs.

Propriétés : Un nombre pair s'écrit sous la forme $2k$, avec k entier.
Un nombre impair s'écrit sous la forme $2k+1$, avec k entier.

Propriété : Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :

Vidéo https://youtu.be/eKo1MpX9ktw

Soit a est un nombre impair. Alors il s'écrit sous la forme $a = 2k+1$, avec k entier.
Donc $a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$, avec $k' = 2k^2 + 2k$.
k' est entier car somme de deux entiers, donc a^2 s'écrit sous la forme $a^2 = 2k' + 1$ et donc a^2 est impair.

Méthode : Résoudre un problème avec des nombres pairs ou impairs

Vidéo https://youtu.be/xCLLqx11Le0
Vidéo https://youtu.be/cE3gOMZ0Kko

Montrer que le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

Soit deux entiers consécutifs n et $n+1$.

- Si n est pair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = 2k(2k+1) = 2k_1$, avec $k_1 = k(2k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

- Si n est impair, alors il s'écrit sous la forme $n = 2k+1$, avec k entier.
Alors le produit des deux entiers consécutifs s'écrit :
$n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1) = 2k_2$, avec $k_2 = (2k+1)(k+1)$ entier.
Donc $n(n+1)$ est pair.

Dans tous les cas, le produit de deux entiers consécutifs est un nombre pair.

IV. Nombres premiers

Vidéo https://youtu.be/g9PLLhnCv88

1) Définition

Définition : Un nombre est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs qui sont 1 et lui-même.

Liste des nombres premiers inférieurs à 30 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29

Remarques :
- Cette liste est infinie.
- Le nombre 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.

2) Décomposition d'un nombre en produits de facteurs premiers

Exemples :
- 20 = 2 x 2 x 5 est une décomposition du nombre 20 en produits de facteurs premiers.
En effet, chaque facteur de la décomposition est un nombre premier.
- 231 = 3 x 7 x 11
- 225 = 3 x 3 x 5 x 5

Propriété :
Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près.

Méthode : Décomposer un nombre en produits de facteurs premiers

Vidéo **https://youtu.be/BIGalqNz_pk**

1) Décomposer 84 en produits de facteurs premiers.
2) Décomposer 300 en produits de facteurs premiers.

1) Pour le faire, il est important de bien connaître le début de la liste des nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, …

On commence par tester si **84** est divisible par **2** (1[er] nombre premier).
La réponse est « oui » car **84** se termine par un chiffre pair.
Et on a : **84 : 2** = **42**

84	**2**
42	

On recommence, en testant si **42** est divisible par **2**.
La réponse est « oui » et **42 : 2** = **21**

84	2
42	**2**
21	

On recommence, en testant si **21** est divisible par 2.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **21** est divisible par **3**.
La réponse est « oui ».
Et on a : **21 : 3** = **7**

84	2
42	2
21	**3**
7	

7 est un nombre premier divisible uniquement par 1 et **lui même**.
Et on a **7 : 7** = **1**.

C'est fini, on trouve **1** !

84	2
42	2
21	3
7	**7**
1	

La décomposition en facteurs premiers de 84 se lit dans la colonne de droite.

84 = **2 x 2 x 3 x 7**

2) On commence par tester si **300** est divisible par **2** (1er nombre premier).
La réponse est « oui » car **300** se termine par un chiffre pair.
Et on a : **300 : 2** = **150**

$$\begin{array}{r|l} \mathbf{300} & \mathbf{2} \\ \mathbf{150} & \end{array}$$

On recommence, en testant si **150** est divisible par **2**.
La réponse est « oui » et **150 : 2** = **75**

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ \mathbf{150} & \mathbf{2} \\ \mathbf{75} & \end{array}$$

On recommence, en testant si **75** est divisible par 2.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **75** est divisible par **3**.
La réponse est « oui » car 7+5=12 est divisible par 3.
Et on a : **75 : 3** = **25**

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ \mathbf{75} & \mathbf{3} \\ \mathbf{25} & \end{array}$$

On recommence, en testant si **25** est divisible par 3.
La réponse est « non » !
On teste alors le nombre premier suivant dans la liste.
Est-ce que **25** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **25 : 5** = **5**.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ \mathbf{25} & \mathbf{5} \\ \mathbf{5} & \end{array}$$

On recommence, en testant si **5** est divisible par **5**.
La réponse est « oui » et on a **5 : 5** = **1**.

C'est fini, on trouve **1** !

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \end{array}$$

La décomposition en facteurs premiers de 300 se lit dans la colonne de droite.

300 = **2 x 2 x 3 x 5 x 5**

V. Nombres premiers entre eux

Exemples :

Vidéo **https://youtu.be/sSgsrHMyFrI**

a) Tous les diviseurs de 60 sont :1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60
Tous les diviseurs de 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100
Les diviseurs communs à 60 et 100 sont : 1, 2, 4, 5, 10, 20

b) Tous les diviseurs de 20 sont :1, 2, 4, 5, 10, 20
Tous les diviseurs de 63 sont : 1, 3, 7, 9, 21, 63
Le seul diviseur commun à 20 et 63 est : 1

On dit dans ce cas que 20 et 63 sont premiers en eux.

Ce qui n'est pas le cas de 60 et 100 qui ont de nombreux diviseurs communs.

Définition : On dit que deux nombres sont **premiers entre eux** lorsque leur seul diviseur commun est 1.

VI. Application aux fractions

Définition : On dit qu'une fraction est **irréductible**, lorsque son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.

Méthode : Déterminer des fractions égales

Vidéo https://youtu.be/HkqUaPYgwQM
Vidéo https://youtu.be/qZaTIiAWkA0

1) Simplifier la fraction $\frac{153}{85}$.
2) Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

1) Pour simplifier une fraction, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 153 & 3 \\ 51 & 3 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 85 & 5 \\ 17 & 17 \\ 1 & \end{array}$$

On a ainsi les décompositions de 153 et 85 :

153 = 3 x 3 x 17 et 85 = 5 x 17

Donc : $\frac{153}{85} = \frac{3\times3\times17}{5\times17} = \frac{3\times3}{5} = \frac{9}{5}$.

2) Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 : 60 = 2 x 2 x 3 x 5 et 126 = 2 x 3 x 3 x 7

On a : $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$.
10 et 21 sont premiers entre eux et donc :

$\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.