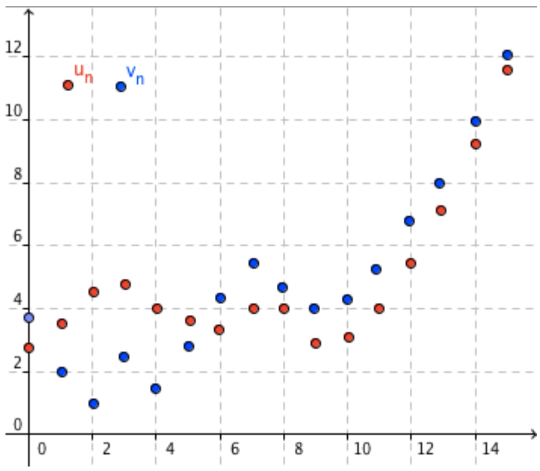
LES SUITES (Partie 2)

I. Limites et comparaison

1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (u_n) pousse la suite (v_n) vers $+\infty$ à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme :

Soit un nombre réel a.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, donc l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.
On a donc pour tout $n \geq n_1$, $a < u_n$.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_2, on a $u_n \leq v_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1\,;\,n_2)$, on a : $a < u_n \leq v_n$.
On en déduit que l'intervalle $]a\,;+\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir du rang $\max(n_1\,;\,n_2)$.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Théorème 2 :
Soit (u_n) et (v_n) deux suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

Vidéo https://youtu.be/iQhh46LupN4

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n$

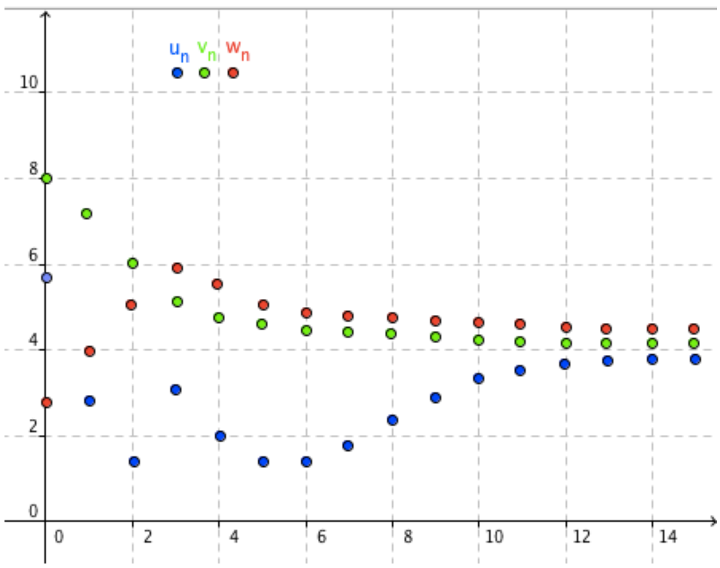
$(-1)^n \geq -1$ donc $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1$

Or $\lim_{n \to +\infty} n^2 - 1 = +\infty$ donc par comparaison $\lim_{n \to +\infty} n^2 + (-1)^n = +\infty$.

2) Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :
Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites définies sur $\mathbb{N}$.
Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} w_n = L$ alors $\lim_{n \to +\infty} v_n = L$.

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (u_n) et (w_n) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (v_n) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.
Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant L.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_1.

- $\lim_{n\to+\infty} w_n = L$, donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note n_2.
- A partir d'un certain rang, que l'on note n_3, on a $u_n \leq v_n \leq w_n$.
- Ainsi pour tout $n \geq \max(n_1\ ;\ n_2\ ;\ n_3)$, l'intervalle I contient tous les termes de la suite (v_n).

Et donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

Vidéo https://youtu.be/OdzYjz_vQbw

Déterminer la limite suivante : $\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin n}{n}$

On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$, donc : $-\dfrac{1}{n} \leq \dfrac{\sin n}{n} \leq \dfrac{1}{n}$

Or : $\lim_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$

Et donc $\lim_{n\to+\infty} 1 + \dfrac{\sin n}{n} = 1$.

II. Suites majorées, minorées, bornées

1) Définitions :

Définitions : - La suite (u_n) est **majorée** s'il existe un réel *M* tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- La suite (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq m$.
- La suite (u_n) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :
- Les suites de terme général $\cos n$ ou $(-1)^n$ sont bornées.
- La suite de terme général n^2 est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

Vidéo https://youtu.be/F1u_BVwiW8E

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$. Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est majorée par 3.

- **Initialisation :**

$u_0 = 2 < 3$
La propriété est donc vraie pour n = 0.

- **Hérédité :**

- Hypothèse de récurrence :
Supposons qu'il existe un entier k tel que la propriété soit vraie : $u_k < 3$.
- Démontrons que : La propriété est vraie au rang k+1 : $u_{k+1} < 3$.

On a : $u_k < 3$ donc $\frac{1}{3}u_k < \frac{1}{3} \times 3$ et donc $\frac{1}{3}u_k + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2$.

Soit : $u_{k+1} < 3$

- **Conclusion :**

La propriété est vraie pour n = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n, soit : $u_n < 3$.

2) Convergence des suites monotones

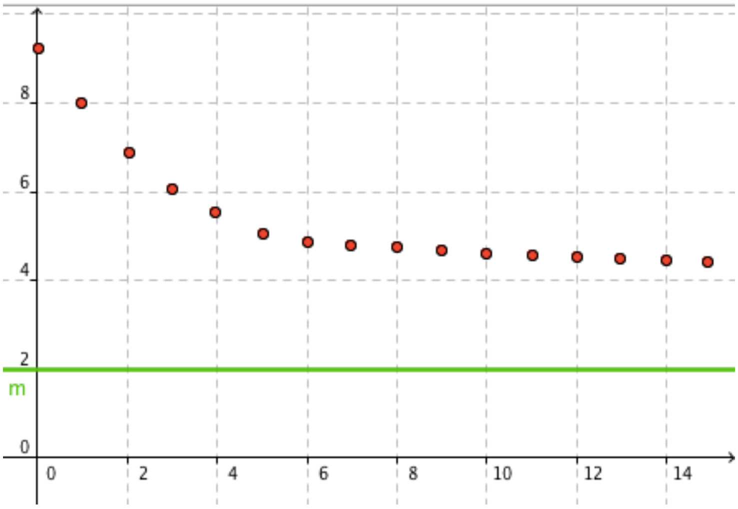
Propriété : Soit (u_n) une suite croissante définie sur $\mathbb{N}$.
Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ alors la suite (u_n) est majorée par L.

Démonstration par l'absurde :
Démontrons par l'absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang p, tel que $u_p > L$. »
- L'intervalle ouvert $]L - 1\ ;\ u_p[$ contient L.
Or, par hypothèse, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$. Donc l'intervalle $]L - 1\ ;\ u_p[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang (1).
- Comme (u_n) est croissante : $u_n \geq u_p$ pour $n > p$.
Donc si $n > p$, alors $u_n \notin\ ]L - 1\ ;\ u_p[$ (2).
(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas $p \in \mathbb{N}$, tel que $u_p > L$.
Et donc la suite (u_n) est majorée par L.

Théorème de convergence monotone :
- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

- Admis -

Remarque :
Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.
Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

Vidéo https://youtu.be/gO-MQUIBAfo

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$ et $u_0 = 2$.
Démontrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

- On a démontré dans le paragraphe I. que la suite (u_n) est croissante.
On a démontré dans la méthode précédente que la suite (u_n) est majorée par 3.
D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (u_n) est convergente.

- On pose : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$.
Or $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3}L + 2$ par produit et somme de limites.
Une limite étant unique, on en déduit que $L = \frac{1}{3}L + 2$, soit $L = 3$.
La suite (u_n) converge donc vers 3.

Corollaire :
1) Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers $+\infty$.
2) Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers $-\infty$.

Démonstration au programme du 1) :

Soit un réel a.
Comme (u_n) n'est pas majorée, il existe un entier p tel que $u_p > a$.
La suite (u_n) est croissante donc pour tout $n > p$, on a : $u_n \geq u_p$.
Donc pour tout $n > p$, on a : $u_n > a$.

Et donc à partir d'un certain rang p, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $]a\,;\,+\infty[$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

III. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1) Rappel

Définition : Une suite (u_n) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé **raison** de la suite.

Exemple : La suite (u_n) définie par $u_{n+1} = -3u_n$ et $u_0 = 5$ est une suite géométrique de raison –3 et de premier terme 5.

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n$.

Exemple : Pour la suite précédente, on a pour tout n : $u_n = 5 \times (-3)^n$.

2) Limites

q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$	*Pas de limite*	0	1	$+\infty$

Démonstration au programme dans le cas $q > 1$:
Prérequis : Pour tout entier naturel n, on a : $(1+a)^n \geq 1 + na$ (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que $q > 1$, alors on peut poser $q = a + 1$ avec $a > 0$.
$q^n = (1+a)^n \geq 1 + na$.
Or $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + na = +\infty$ car $a > 0$.
Donc d'après le théorème de comparaison : $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$.

Exemple :
La suite de terme général -5×4^n a pour limite $-\infty$ car $\lim\limits_{n\to\infty} 4^n = +\infty$.

3) Somme des termes d'une suite géométrique

Propriété : n est un entier naturel non nul et q un réel différent de 1 alors on a :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/XTftGHfnYMw

Déterminer les limites suivantes :

$a)\ \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n$ $\qquad c)\ \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$

a) $(-2)^n$ est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc $(-2)^n$ ne possède pas de limite.

Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n}{3}$ n'existe pas.

b) • $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$

Il s'agit d'une forme indéterminée du type "$\infty - \infty$".

• Levons l'indétermination :

$$2^n - 3^n = 3^n\left(\frac{2^n}{3^n}-1\right) = 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right)$$

• Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, car $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ avec $-1 < \frac{2}{3} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1 = -1$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n = +\infty$ car 3^n est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

Donc par limite d'un produit $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1\right) = -\infty$

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n - 3^n = -\infty$.

c) On reconnaît les n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 1. Donc :

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$, comme limite d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ avec $-1 < \frac{1}{2} < 1$.

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 1$.

Et donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 2$.

Soit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

Vidéo https://youtu.be/6-vFnQ6TghM
Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUuwEY

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.
On note (u_n) la somme épargnée à l'année n.
On a alors : $u_{n+1} = 1{,}03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$.

1) Calculer u_1 et u_2.
2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
3) Exprimer v_n en fonction de n.
4) En déduire v_n en fonction de n.
5) Étudier les variations de (v_n).

1) $u_1 = 1{,}03u_0 + 300 = 5450$
$u_2 = 1{,}03u_1 + 300 = 5913{,}5$

2) $v_{n+1} = u_{n+1} + 10000$
$= 1{,}03u_n + 300 + 10000$
$= 1{,}03u_n + 10300$
$= 1{,}03(v_n - 10000) + 10300$, car $v_n = u_n + 10000$
$= 1{,}03v_n - 10300 + 10300$
$= 1{,}03v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme $v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000$.

3) Pour tout n, $v_n = 15000 \times 1{,}03^n$.

4) Pour tout n, $u_n = v_n - 10000 = 15000 \times 1{,}03^n - 10000$
On a alors : $u_{10} = 15000 \times 1{,}03^{10} - 10000 \approx 10158{,}75$

5) Pour tout n,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1{,}03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1{,}03^n - 10000) \\ &= 15000 \times (1{,}03^{n+1} - 1{,}03^n) \\ &= 15000 \times 1{,}03^n \times (1{,}03 - 1) \\ &= 450 \times 1{,}03^n > 0 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.