LES SUITES (Partie 2)

I. Limites et comparaison

1. Théorèmes de comparaison

Théorème 1 :

Soit (*un*) et (*vn*) deux suites définies sur ℕ.

Si, à partir d'un certain rang, et alors .

Par abus de langage, on pourrait dire que la suite (*un*) pousse la suite (*vn*) vers à partir d'un certain rang.



Démonstration au programme :

Soit un nombre réel *a.*

- , donc l'intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note *n*1.

On a donc pour tout , .

- A partir d'un certain rang, que l'on note *n*2, on a .

- Ainsi pour tout , on a : .

On en déduit que l'intervalle contient tous les termes de la suite (*vn*) à partir du rang .

Et donc .

Théorème 2 :

Soit (*un*) et (*vn*) deux suites définies sur ℕ.

Si, à partir d'un certain rang, et alors .

Méthode : Déterminer une limite par comparaison

 **Vidéo** [**https://youtu.be/iQhh46LupN4**](https://youtu.be/iQhh46LupN4)

Déterminer la limite suivante :

 donc

Or donc par comparaison .

1. Théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes :

Soit (*un*), (*vn*) et (*wn*) trois suites définies sur ℕ.

Si, à partir d'un certain rang, et alors .

Par abus de langage, on pourrait dire que les suites (*un*) et (*wn*) (les gendarmes) se resserrent autour de la suite (*vn*) à partir d'un certain rang pour la faire converger vers la même limite.

Ce théorème est également appelé le **théorème du sandwich**.



Démonstration :

Soit un intervalle ouvert I contenant *L*.

- , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note *n*1.

- , donc l'intervalle I contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang que l'on note *n*2.

- A partir d'un certain rang, que l'on note *n*3, on a .

- Ainsi pour tout , l'intervalle I contient tous les termes de la suite (*vn*).

Et donc .

Méthode : Déterminer une limite par encadrement

 **Vidéo** [**https://youtu.be/OdzYjz\_vQbw**](https://youtu.be/OdzYjz_vQbw)

Déterminer la limite suivante :

On a : donc :

Or : donc d'après le théorème des gendarmes

Et donc .

II. Suites majorées, minorées, bornées

 1) Définitions :

Définitions : - La suite (*un*) est **majorée** s'il existe un réel *M* tel que pour tout entier

*n* ϵ ℕ, .

- La suite (*un*) est **minorée** s'il existe un réel *m* tel que pour tout entier *n* ϵ ℕ, .

- La suite (*un*) est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemples :

- Les suites de terme général ou sont bornées.

- La suite de terme général *n*2 est minorée par 0.

Méthode : Démontrer qu'une suite est majorée ou minorée

 **Vidéo** [**https://youtu.be/F1u\_BVwiW8E**](https://youtu.be/F1u_BVwiW8E)

On considère la suite (*un*) définie pour tout entier naturel *n* par et . Démontrer par récurrence que la suite (*un*) est majorée par 3.

* **Initialisation :**

La propriété est donc vraie pour *n* = 0.

* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : .

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang *k*+1 : .

On a : donc et donc .

Soit :

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*, soit : .

2) Convergence des suites monotones

Propriété : Soit (*un*) une suite croissante définie sur ℕ.

Si alors la suite (*un*) est majorée par *L*.

Démonstration par l'absurde :

Démontrons par l’absurde en supposant le contraire, soit : « Il existe un rang *p*, tel que . »

- L'intervalle ouvert contient *L*.

Or, par hypothèse, . Donc l'intervalle contient tous les termes de la suite (*un*) à partir d'un certain rang (1).

- Comme (*un*) est croissante : pour .

Donc si , alors (2).

(1) et (2) sont contradictoires, on en déduit qu'il n'existe pas *p* ϵ ℕ, tel que .

Et donc la suite (*un*) est majorée par *L*.

Théorème de convergence monotone :

- Si une suite croissante est majorée alors elle est convergente.

- Si une suite décroissante est minorée alors elle est convergente.

*- Admis -*

Remarque :

Ce théorème permet de s'assurer de la convergence mais ne donne pas la limite.

Dans l'exemple ci-dessous, la suite décroissante est minorée par 2. Cela prouve que la limite de la suite est supérieure à 2 mais n'est pas nécessairement égale à 2.



Méthode : Utiliser le théorème de convergence monotone

 **Vidéo** [**https://youtu.be/gO-MQUlBAfo**](https://youtu.be/gO-MQUlBAfo)

On considère la suite (*un*) définie pour tout entier naturel *n* par et .

Démontrer que la suite (*un*) est convergente et calculer sa limite.

- On a démontré dans le paragraphe I. que la suite (*un*) est croissante.

On a démontré dans la méthode précédente que la suite (*un*) est majorée par 3.

D'après le théorème de convergence monotone, on en déduit que la suite (*un*) est convergente.

- On pose :.

Or , donc par produit et somme de limites.

Une limite étant unique, on en déduit que , soit *L* = 3.

La suite (*un*) converge donc vers 3.

Corollaire :

1) Si une suite croissante est non majorée alors elle tend vers .

2) Si une suite décroissante est non minorée alors elle tend vers .

Démonstration au programme du 1) :

Soit un réel *a*.

Comme (*un*) n'est pas majorée, il existe un entier *p* tel que .

La suite (*un*) est croissante donc pour tout , on a : .

Donc pour tout , on a : .

Et donc à partir d'un certain rang *p*, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle .

On en déduit que .

III. Comportement à l'infini d'une suite géométrique

1. Rappel

Définition : Une suite (*un*) est une **suite géométrique** s'il existe un nombre *q* tel que pour tout entier *n*, on a : .

Le nombre *q* est appelé **raison** de la suite.

Exemple : La suite (*un*) définie par et est une suite géométrique de raison –3 et de premier terme 5.

Propriété : (*un*) est une suite géométrique de raison *q* et de premier terme *u0*.

Pour tout entier naturel *n*, on a : .

Exemple : Pour la suite précédente, on a pour tout *n* : .

1. Limites

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *q* |  |  |  |  |
|  | *Pas de limite* | 0 | 1 |  |

Démonstration au programme dans le cas *q* > 1 :

Prérequis : Pour tout entier naturel *n*, on a : (*inégalité de Bernoulli)*, démontrée dans le chapitre « LES SUITES (Partie 1) Paragraphe I. ».

On suppose que , alors on peut poser avec .

.

Or car .

Donc d’après le théorème de comparaison : .

Exemple :

La suite de terme général a pour limite car .

3) Somme des termes d’une suite géométrique

Propriété : *n* est un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1 alors on a :

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

 **Vidéo** [**https://youtu.be/XTftGHfnYMw**](https://youtu.be/XTftGHfnYMw)

Déterminer les limites suivantes :

a) est une suite géométrique de raison –2 strictement inférieure à –1.

Donc ne possède pas de limite.

Et donc n'existe pas.

b) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination :

• Or , car est une suite géométrique de raison avec

 .

Donc : .

Or car est une suite géométrique de raison 3 strictement supérieure à 1.

Donc par limite d'un produit

Soit : .

c) On reconnaît les *n* premiers termes d'une suite géométrique de raison et de premier terme 1. Donc :

Or , comme limite d’une suite géométrique de raison avec

 .

Donc : .

Et donc : .

Soit : .

Méthode : Étudier un phénomène modélisable par une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/6-vFnQ6TghM**](https://youtu.be/6-vFnQ6TghM)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/0CNt\_fUuwEY**](https://youtu.be/0CNt_fUuwEY)

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3 % par an. Chaque année suivante, il dépose 300 € de plus.

On note (*un*) la somme épargnée à l'année *n*.

On a alors : et .

1) Calculer *u1* et *u2*.

2) Prouver que la suite (*vn*) définie pour tout entier *n* par est géométrique et donner sa raison et son premier terme.

3) Exprimer *vn* en fonction de *n*.

4) En déduire *vn* en fonction de *n*.

5) Étudier les variations de (*vn*).

1)

2)

, car

Donc (*vn*) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

.

3) Pour tout *n*, .

4) Pour tout *n*,

On a alors :

5) Pour tout *n*,

Donc la suite (*un*) est strictement croissante.

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)