LES SUITES (Partie 1)

I. Raisonnement par récurrence

 1) Le principe



*C'est au mathématicien italien Giuseppe Peano (1858 ; 1932), ci-contre, que l'on attribue le principe du raisonnement par récurrence. Le nom a probablement été donné par Henri Poincaré (1854 ; 1912).*



On considère une file illimitée de dominos placés côte à côte. La règle veut que lorsqu'un domino tombe, alors il fait tomber le domino suivant et ceci à n'importe quel niveau de la file.

Alors, si le premier domino tombe, on est assuré que tous les dominos de la file tombent.

****

Définition : Une propriété est dite **héréditaire** à partir du rang *n0* si lorsque pour un entier *k*  *n0*, la propriétéest vraie, alors elle est vraie pour l'entier *k*+1.

Dans l'exemple, si on suppose qu'un domino (*k*) tombe alors le domino suivant (*k*+1) tombe également.

Principe du raisonnement par récurrence :

Si la propriété P est : - vraie au rang *n0* (Initialisation),

 - héréditaire à partir du rang *n0* (Hérédité),

alors la propriété P est vraie pour tout entier *n* *n0*.

Dans l'exemple, le premier domino tombe (initialisation). Ici *n0* = 1.

L'hérédité est vérifiée (voir plus haut).

On en déduit que tous les dominos tombent.

Remarque : Une démonstration par récurrence sur les entiers est mise en œuvre lorsque toute démonstration "classique" est difficile.

 2) Exemples avec les suites

Méthode : Démontrer par récurrence l’expression générale d’une suite

 **Vidéo** [**https://youtu.be/H6XJ2tB1\_fg**](https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg)

On considère la suite (*un*) définie pour tout entier naturel *n* par et .

Démontrer par récurrence que : .

* **Initialisation :** *🡪 Le premier domino tombe.*

.

La propriété est donc vraie pour *n* = 0.

* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence : *🡪 On suppose que le k-ième domino tombe.*

 Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : .

 - Démontrons que : *🡪 Le k+1-ième domino tombe-t-il ?*

La propriété est vraie au rang *k*+1, soit : .

, par définition

 , par hypothèse de récurrence

 *🡪 Le k+1-ième domino tombe.*

* **Conclusion :** *🡪 Tous les dominos tombent.*

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*, soit : .

Méthode : Démontrer la monotonie par récurrence

 **Vidéo** [**https://youtu.be/nMnLaE2RAGk**](https://youtu.be/nMnLaE2RAGk)

On considère la suite (*un*) définie pour tout entier naturel *n* par et .

Démontrer par récurrence que la suite (*un*) est croissante.

On va démontrer que pour tout entier naturel *n*, on a :

* **Initialisation :**  et

donc

* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

 Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie : .

 - Démontrons que : La propriété est vraie au rang *k*+1 : .

On a donc : et donc soit .

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*, soit : et donc la suite (*un*) est croissante.

 3) Inégalité de Bernoulli

Soit un nombre réel *a* strictement positif.

Pour tout entier naturel *n*, on a : .

Démonstration au programme :

 **Vidéo** [**https://youtu.be/H6XJ2tB1\_fg**](https://youtu.be/H6XJ2tB1_fg)

* **Initialisation :**

- La propriété est vraie pour *n* = 0.

En effet, et .

* **Hérédité :**

 - Hypothèse de récurrence :

Supposons qu'il existe un entier *k* tel que la propriété soit vraie :

 - Démontrons que : la propriété est vraie au rang *k*+1, soit :

, d'après l'hypothèse de récurrence.

Donc :

Soit :

Soit encore : , car .

Et donc : .

* **Conclusion :**

La propriété est vraie pour *n* = 0 et héréditaire à partir de ce rang. D'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel *n*.

Remarque : L'initialisation est indispensable sinon on peut démontrer des propriétés fausses !

En effet, démontrons par exemple que la propriété "2n est divisible par 3" est héréditaire sans vérifier l'initialisation.

Supposons qu'il existe un entier *k* tel que 2*k* est divisible par 3.

2*k*+1 = 2*k* x 2 = 3*p*x 2, où *p* est un entier (d'après l'hypothèse de récurrence).

 = 6*p*

Donc 2*k*+1 est divisible par 3. L'hérédité est vérifiée et pourtant la propriété n'est jamais vraie.



II. Limite finie ou infinie d'une suite

 1) Limite infinie

Exemple :

La suite (*un*) définie sur ℕ par a pour limite .

En effet, les termes de la suite deviennent aussi grands que l'on souhaite à partir d'un certain rang.

Si on prend un réel *a* quelconque, l'intervalle contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Définitions : - On dit que la suite (*un*) admet pour limite si tout intervalle , *a* réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note : .

- On dit que la suite (*un*) admet pour limite si tout intervalle , *b* réel, contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

.

|  |
| --- |
| **Langage naturel** |
| **Entrée**Saisir le réel A**Initialisation**Affecter à n la valeur 0Affecter à u la valeur 2**Traitement des données**Tant que u < A Faire  Affecter à n la valeur n + 1 Affecter à u la valeur 4u **Sortie**Afficher n |

Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite croissante de limite infinie est supérieure à un nombre réel A :

On considère la suite (*un*) définie par et pour tout entier *n,* .

Cette suite est croissante et admet pour limite .

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

En appliquant cet algorithme avec A = 100, on obtient en sortie *n* = 3.

A partir du terme *u3*, la suite est supérieure à 100.

En langage calculatrice et Python, cela donne :

 **Vidéos dans la Playlist :**

 [**https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ**](https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCarZdaGUMO7DV35pi1I8zIJZ)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **TI** | **CASIO** | **Python** |
| Capture d’écran 2012-05-10 à 15Capture d’écran 2012-05-10 à 15 | Capture d’écran 2012-05-10 à 15Capture d’écran 2012-05-10 à 15 |  |

 2) Limite finie

Exemple : La suite (*un*) définie sur ℕ\* par a pour limite 1.

En effet, les termes de la suite se resserrent autour de 1 à partir d'un certain rang.

Si on prend un intervalle ouvert quelconque contenant 1, tous les termes de la suite appartiennent à cet intervalle à partir d'un certain rang.



Définition : On dit que la suite (*un*) admet pour limite *L* si tout intervalle ouvert contenant *L* contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang et on note :

.

Une telle suite est dite **convergente**.

Définition : Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Remarque :

Une suite qui est divergente n'admet pas nécessairement de limite infinie.

Par exemple, la suite de terme générale prend alternativement les valeurs –1 et 1. Elle n'admet donc pas de limite finie, ni infinie. Elle est donc divergente.

 3) Limites des suites usuelles

Propriétés :

-, , .

- , , .

Démonstration de :

Soit un intervalle quelconque ouvert , *a* réel positif non nul, contenant 0.

Pour tout *n*, tel que : *n* > , on a : 0 < < *a* et donc

Ainsi, à partir d'un certain rang, tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle et donc .

III. Opérations sur les limites

 **Vidéo** [**https://youtu.be/v7hD6s3thp8**](https://youtu.be/v7hD6s3thp8)

1. Limite d'une somme

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* | *L* |  |  |  |
|  | *L'* |  |  |  |  |  |
|  | *L + L'* |  |  |  |  | F.I.\* |

\* Forme indéterminée : On ne peut pas prévoir la limite éventuelle.

Exemple :

 et .

D'après la règle sur la limite d'une somme :

1. Limite d'un produit

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L >* 0 | *L <* 0 | *L >* 0 | *L <* 0 |  |  |  | 0 |
|  | *L'* |  |  |  |  |  |  |  |  ou  |
|  | *L L'* |  |  |  |  |  |  |  | F.I. |

Exemple :

 donc

et donc

D'après la règle sur la limite d’un produit :

1. Limite d'un quotient

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | *L* | *L* | *L >* 0 ou  | *L <* 0 ou  | *L >* 0 ou  | *L <* 0 ou  | 0 |  |  |  |  | ou  |
|  | *L'*0 | ou  | 0 avec  | 0 avec  | 0 avec  | 0 avec  | 0 | *L' >* 0 | *L' <* 0 | *L' >* 0 | *L' <* 0 | ou  |
|  |  | 0 |  |  |  |  | F.I. |  |  |  |  | F.I. |

Exemple :

 donc et donc

D'après la règle sur la limite d'un quotient :

Remarque :

Tous ces résultats sont intuitifs. On retrouve par exemple, un principe sur les opérations de limite semblable à la règle des signes établie sur les nombres relatifs.

Il est important cependant de reconnaître les formes indéterminées pour lesquelles il faudra utiliser des calculs algébriques afin de lever l'indétermination ou utiliser d'autres propriétés sur les calculs de limites.

Les quatre formes indéterminées sont, par abus d'écriture :

, "", et .

Méthode : Lever une indétermination

 **Vidéo** [**https://youtu.be/RQhdU7-KLMA**](https://youtu.be/RQhdU7-KLMA)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/wkMleHBnyqU**](https://youtu.be/wkMleHBnyqU)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/loytWsU4pdQ**](https://youtu.be/loytWsU4pdQ)

 **Vidéo** [**https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ**](https://youtu.be/9fEHRHdbnwQ)

Déterminer les limites suivantes :

a) b) c)

d) e)

a) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination en factorisant par le monôme de pus haut degré :

• Or et donc + par limite d’une somme.

Et donc par limite d’un produit.

Soit : .

b) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination :

• Or et donc par limite d'un produit :

Soit :

c) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

• Or donc par limite d’une somme.

On prouve de même que : .

Donc, par limite d'un quotient : .

Et donc : .

d) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination en factorisant le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré :

• Or donc par limite d’une somme.

On prouve de même que : .

Donc, par limite d'un quotient : .

Et donc par limite d’un produit.

Soit .

e) • et

Il s'agit d'une forme indéterminée du type .

• Levons l’indétermination par la méthode de l’expression conjuguée :

• Or par limite d'une somme

Et donc : par limite d’un quotient.

Soit : .

Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[*www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales*](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)