

SUITES ARITHMÉTIQUE- GÉOMÉTRIQUES

I. Etude d'une suite arithmético-géométrique

Définition : Une suite (u_n) est dite arithmético-géométrique s'il existe deux nombres a et b tels que pour tout entier n , on a : $u_{n+1} = au_n + b$.

Un investisseur dépose 5000 € sur un compte rémunéré à 3% par an. Chaque année suivante, il dépose 300€ de plus. On note (u_n) la somme épargnée à l'année n .

On a alors : $u_{n+1} = 1,03u_n + 300$ et $u_0 = 5000$

La suite (u_n) est arithmético-géométrique.

- 1) À l'aide du tableur, calculer la somme totale épargnée à la 10^{ème} année.
- 2) Prouver que la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = u_n + 10000$ est géométrique et donner sa raison et son premier terme.
- 3) Exprimer v_n en fonction de n .
- 4) En déduire u_n en fonction de n . Retrouver alors le résultat de la question 1 par calcul.
- 5) Etudier les variations de (u_n) .
- 6) Calculer la limite de (u_n) .

▶ Vidéo <https://youtu.be/6-vFnQ6TghM>

▶ Vidéo https://youtu.be/0CNt_fUwEY

▶ Vidéo <https://youtu.be/EgYTH79sDfw>

1) Avec le tableur, on obtient :

| | A | B | C | D |
|----|----------|-----------|---|---|
| 1 | Année 0 | 5000 | | |
| 2 | Année 1 | 5450 | | |
| 3 | Année 2 | 5913,5 | | |
| 4 | Année 3 | 6390,905 | | |
| 5 | Année 4 | 6882,6322 | | |
| 6 | Année 5 | 7389,1111 | | |
| 7 | Année 6 | 7910,7844 | | |
| 8 | Année 7 | 8448,108 | | |
| 9 | Année 8 | 9001,5512 | | |
| 10 | Année 9 | 9571,5978 | | |
| 11 | Année 10 | 10158,746 | | |

La somme totale épargnée à la 10^{ème} année est égale à environ 10158,75 €.

2)

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} + 10000 \\
 &= 1,03u_n + 300 + 10000 \\
 &= 1,03u_n + 10300 \\
 &= 1,03(u_n + 10000) \\
 &= 1,03v_n
 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme

$$v_0 = u_0 + 10000 = 5000 + 10000 = 15000 .$$

3) Pour tout n , $v_n = 15000 \times 1,03^n$.

4) Pour tout n , $u_n = 15000 \times 1,03^n - 10000$.

$$\text{On a alors : } u_{10} = 15000 \times 1,03^{10} - 10000 \approx 10158,75$$

5) Pour tout n ,

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 15000 \times 1,03^{n+1} - 10000 - (15000 \times 1,03^n - 10000) \\
 &= 15000 \times (1,03^{n+1} - 1,03^n) \\
 &= 15000 \times 1,03^n \times (1,03 - 1) \\
 &= 450 \times 1,03^n > 0
 \end{aligned}$$

Donc la suite (u_n) est strictement croissante.

6) Comme $1,03 > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1,03^n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (15000 \times 1,03^n) = +\infty$

Et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (15000 \times 1,03^n - 10000) = +\infty$, soit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

II. Représentation graphique d'une suite arithmético-géométrique

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 8$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 0,85u_n + 1,8$.

1) Dans un repère orthonormé, tracer les droites d'équations respectives $y = 0,85x + 1,8$ et $y = x$.

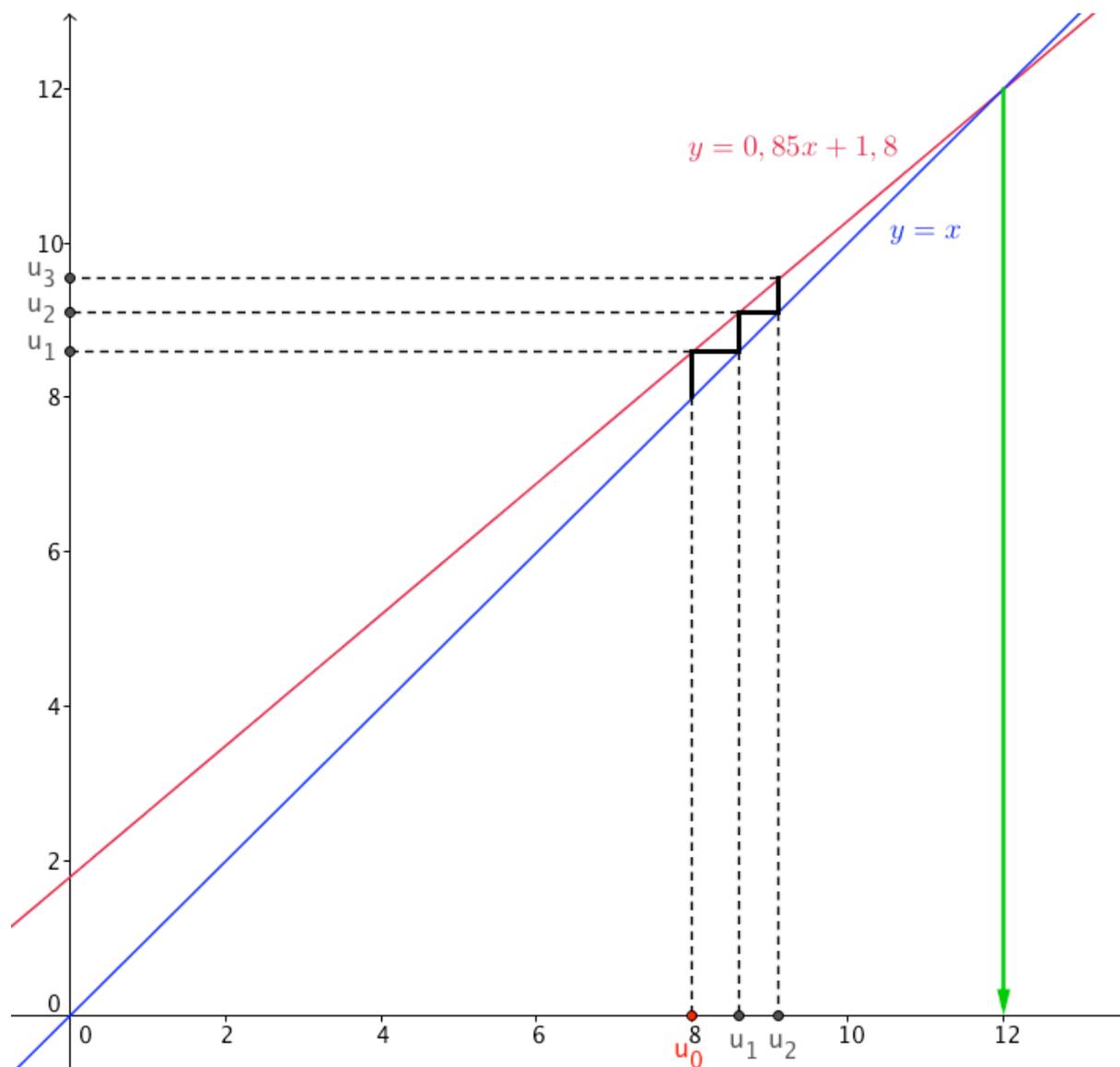
2) Dans ce repère, placer u_0 sur l'axe des abscisses, puis en utilisant les droites précédemment tracées, construire sur le même axe u_1 , u_2 et u_3 . On laissera apparent les traits de construction.

3) À l'aide du graphique, conjecturer la limite de la suite (u_n) .

D'après Bac ES Polynésie 2009

 Vidéo <https://youtu.be/L7bBL4z-r90>

1) 2)



3) En continuant le tracé, celui-ci se rapprocherait de plus en plus de l'intersection des deux droites. On conjecture que la limite de la suite (u_n) est 12.

Afficher la représentation graphique sur la calculatrice :

▶ Vidéo TI <https://youtu.be/bRlvVs9KZuk>

▶ Vidéo Casio <https://youtu.be/9iDvDn3iWqQ>

▶ Vidéo HP <https://youtu.be/wML003kdLRo>



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.
www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales

Yvan Monka – Académie de Strasbourg – www.maths-et-tiques.fr