LIMITES DE SUITES

I. Limite d'une suite géométrique

1) Suite (q_n)

q	$0<q<1$	$q=1$	$q>1$
$\lim\limits_{n\to+\infty} q^n =$	0	1	$+\infty$

Exemples :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4^n+3\right)$?

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(4^n+3\right) = +\infty$

2) Suite géométrique positive

Propriété : (u_n) est une suite géométrique positive de raison q et de premier terme non nul u_0.

- Si $q>1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $q=1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.
- Si $0<q<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration :

(u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme positif non nul u_0 donc $u_n = u_0 \times q^n$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0 \times \lim\limits_{n\to+\infty} q^n$.

Méthode : Utiliser la limite d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/F-PGmIK5Ypg

Vidéo https://youtu.be/2BueBAoPvvc

Déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3}$ b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$

a) $\frac{2^n}{3}$ est le terme général d'une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{3}$ de raison 2 et $2>1$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^n}{3} = +\infty$.

b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=0$ car $3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison comprise entre 0 et 1.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+3\times\left(\frac{1}{5}\right)^n\right)=1$.

3) Algorithme permettant de déterminer un rang à partir duquel une suite (q^n) est inférieure à un nombre réel A :

Vidéos dans la Playlist :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoQ0obuj7GtEkWJB9QM8aVR

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n$.

Voici un algorithme écrit en langage naturel :

Langage naturel

Entrée
Saisir le réel A
 	
Initialisation
Affecter à n la valeur 0
Affecter à u la valeur 2
 	
Traitement des données
Tant que u > A
    Faire
        Affecter à n la valeur n + 1
        Affecter à u la valeur u/4
 	
Sortie
Afficher n

En appliquant cet algorithme avec A = 0,1, on obtient en sortie n = 3.
A partir du terme u_3, la suite est inférieure à 0,1.
En langage « calculatrice », cela donne :

TI	CASIO
PROGRAM:SEUIL :Input A :0→N :2→U :While U>A :N+1→N :U/4→U :End :Disp N	======SEUIL "A="?→A↵ 0→N↵ 2→U↵ While U>A↵ N+1→N↵ U÷4→U↵ WhileEnd↵ N

II. Limite de la somme de termes consécutifs

Méthode : Calculer la limite de la somme des premiers termes d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/6QjMEzEn5X0

Soit (u_n) la suite géométrique de raison 0,5 et de premier terme $u_0 = 4$.

On note $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$. Calculer la limite de la suite (S_n).

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$$
$$= 4 + 4 \times 0,5 + 4 \times 0,5^2 + ... + 4 \times 0,5^n$$
$$= 4\left(1 + 0,5 + 0,5^2 + ... + 0,5^n\right)$$
$$= 4 \times \frac{1 - 0,5^{n+1}}{1 - 0,5}$$
$$= 8\left(1 - 0,5^{n+1}\right)$$
$$= 8 - 8 \times 0,5^{n+1}$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(8 - 8 \times 0,5^{n+1}\right) = 8$.

D'où $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 8$.