

# GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Dès l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (-287 ; -212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre  $\pi$ . Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, *Archimède* donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.



Vers la fin du XVIII<sup>e</sup> siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, ...

Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaîtra qu'au début du XIX<sup>e</sup> siècle avec le mathématicien français *Augustin Louis Cauchy* (1789 ; 1857) – *ci-contre*.

## I. Définition et représentation graphique

### 1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, ...

On note  $(u_n)$  l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$$u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, \dots$$

On a ainsi défini une suite numérique.

On peut lui associer une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

$$n \mapsto u(n) = u_n$$

**Définitions :** Une suite numérique  $(u_n)$  est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier  $n$  on associe un nombre réel noté  $u_n$ .  
 $u_n$  est appelé le terme de rang  $n$  de cette suite (ou d'indice  $n$ ).

### 2) Générer une suite numérique par une formule explicite

📺 Vidéo <https://youtu.be/HacflVQ7DIE>

Exemples :

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $u_n = 2n$  qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$u_0 = 2 \times 0 = 0,$$

$$u_1 = 2 \times 1 = 2,$$

$$u_2 = 2 \times 2 = 4,$$

$$u_3 = 2 \times 3 = 6.$$

- Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $v_n = 3n^2 - 1$ .

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1,$$

$$v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2,$$

$$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11,$$

$$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26.$$

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de  $n$  et indépendamment des termes précédents.

### 3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :

- On définit la suite  $(u_n)$  par :

$u_0 = 5$  et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$u_0 = 5,$$

$$u_1 = 3 \times u_0 = 3 \times 5 = 15,$$

$$u_2 = 3 \times u_1 = 3 \times 15 = 45.$$

- On définit la suite  $(v_n)$  par :

$v_0 = 3$  et pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = 4v_n - 6$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$v_0 = 3,$$

$$v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \times 3 - 6 = 6,$$

$$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \times 6 - 6 = 18,$$

$$v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \times 18 - 6 = 66.$$

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple  $v_{13}$  sans connaître  $v_{12}$ .

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

 **Vidéos dans la Playlist :**

<https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaotEbHPdHlBxGeHEIX51jZV>

**Sur TI :**

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u-6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
67108866
Fait
```

**Sur Casio :**

```
=====SUITE=====
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u-6→u↵
Next↵
u↵
```

```
?
13
67108866
-Disp-
```

- On définit la suite  $(w_n)$  par :

pour tout  $n$  de  $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ ,  $w_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n$

Les premiers termes de cette suite sont donc :

$$w_1 = 1,$$

$$w_2 = w_1 + 2 = 1 + 2 = 3,$$

$$w_3 = w_2 + 3 = 3 + 3 = 6,$$

$$w_4 = w_3 + 4 = 6 + 4 = 10.$$

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

#### 4) Représentation graphique d'une suite

► **Vidéos n°7 à 10 :**

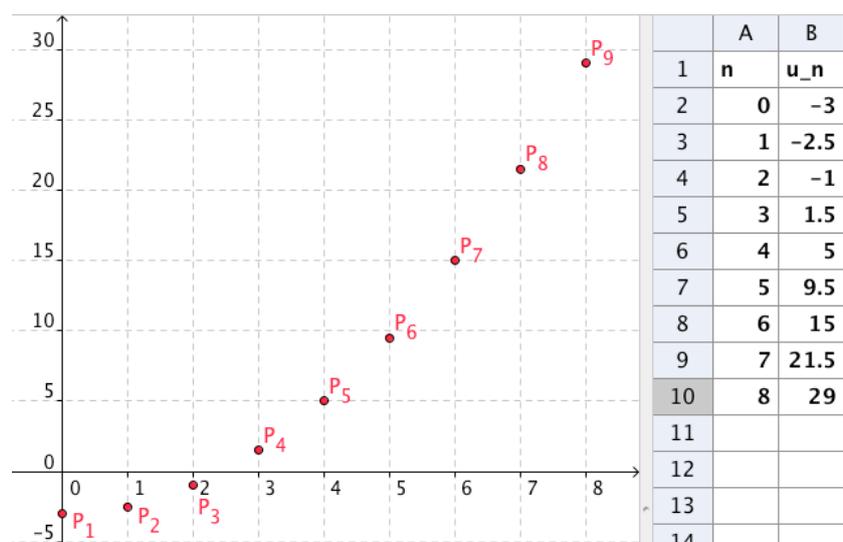
<https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaotEbHPdHlIbxGeHEIX51jZV>

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées  $(n, u_n)$ .

Exemple : Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne :  $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$ .

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29

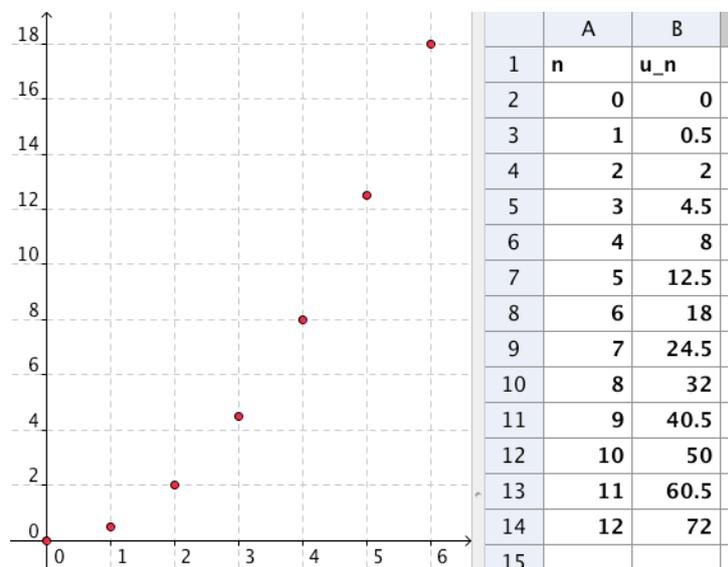


*Il est aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.*

## II. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple :

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite  $(u_n)$  :



On peut conjecturer que cette suite est croissante.

**Définitions :** Soit une suite numérique  $(u_n)$ .

- La suite  $(u_n)$  est croissante signifie que pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} \geq u_n$ .

- La suite  $(u_n)$  est décroissante signifie que pour tout entier  $n$ , on a  $u_{n+1} \leq u_n$ .

**Méthode :** Etudier les variations d'une suite

▶ Vidéo <https://youtu.be/DFz8LDKCw9Y>

▶ Vidéo <https://youtu.be/R8a60pQwiOQ>

1) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 4n + 4$ .

Démontrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

On commence par calculer la différence  $u_{n+1} - u_n$  :

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) + 4 - 4n - 4$$

$$= 4n + 4 + 4 - 4n - 4$$

$$= 4$$

On étudie ensuite le signe de  $u_{n+1} - u_n$  :

Or pour tout  $n$  entier  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ .

On en déduit que la suite  $(u_n)$  est croissante.

2) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on donne la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \frac{1}{n(n+1)}$ .

Démontrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

On commence par calculer le rapport  $\frac{v_{n+1}}{v_n}$  :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

Or  $0 \leq n < n+2$ , on a :  $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$  et donc  $v_{n+1} - v_n < 0$ .

On en déduit que  $(v_n)$  est décroissante.

3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ , on donne la suite  $(w_n)$  définie par :  $w_{n+1} = w_n + 2$ .

Démontrer que la suite  $(w_n)$  est croissante.

$$w_{n+1} - w_n = 2 > 0$$

On en déduit que  $(w_n)$  est croissante.



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

[www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales](http://www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales)