SUITES ARITHMETIQUES ET SUITES GEOMETRIQUES

Vidéo https://youtu.be/pHq6oCIOyIU

I. Suites arithmétiques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où la différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à 5.
Si le premier terme est égal à 3, les premiers termes successifs sont :
u_0 = 3,
u_1 = 8,
u_2 = 13,
u_3 = 18.
Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 5 et de premier terme 3.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$.

Définition : Une suite (u_n) est une suite arithmétique s'il existe un nombre r tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = u_n + r$.
Le nombre r est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique

Vidéo https://youtu.be/YCokWYcBBOk

1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9$.
La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à -9.
(u_n) est une suite arithmétique de raison -9.

2) $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1$.
La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

Vidéo https://youtu.be/6O0KhPMHvBA

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 + nr$.

Démonstration :
La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :

$u_1 = u_0 + r$

$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$

$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$

…

$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique

Vidéo https://youtu.be/iEuoMgBbIz4

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$

Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et
$u_9 = u_0 + 9r = 19$.

On soustrayant membre à membre, on obtient : $5r - 9r = 7 - 19$ donc $r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7$ et donc : $u_0 = -8$.

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ ou encore $u_n = 3n - 8$

2) Variations

Propriété : (u_n) est une suite arithmétique de raison r.
- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration : $u_{n+1} - u_n = u_n + r - u_n = r$.
- Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

Exemple :

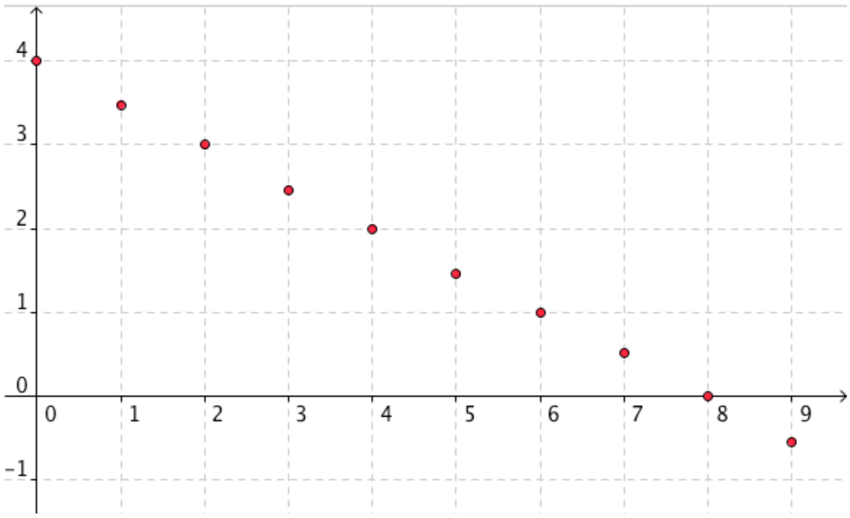
Vidéo https://youtu.be/R3sHNwOb02M

La suite arithmétique (u_n) définie par $u_n = 5 - 4n$ est décroissante car de raison négative et égale à -4.

3) Représentation graphique

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique sont alignés.

Exemple :
On a représenté ci-dessous la suite de raison -0,5 et de premier terme 4.



II. Suites géométriques

1) Définition

Exemple :
Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2.
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 10$,
$u_2 = 20$,
$u_3 = 40$.
Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

Vidéo https://youtu.be/WTmdtbQpa0c

Définition : Une suite (u_n) est une suite géométrique s'il existe un nombre q tel que pour tout entier n, on a : $u_{n+1} = q \times u_n$.
Le nombre q est appelé raison de la suite.

Méthode : Démontrer si une suite est géométrique

Vidéo https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3\times5^n$ est-elle géométrique ?

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times5^{n+1}}{3\times5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$.

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3\times5^0 = 3$.

Exemple concret :

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04.
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04.

On a ainsi :

$u_1 = 1{,}04\times500 = 520$ $\quad$ $u_2 = 1{,}04\times520 = 540{,}80$ $\quad$ $u_3 = 1{,}04\times540{,}80 = 562{,}432$

De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04\times u_n$ avec $u_0 = 500$

On peut également exprimer u_n en fonction de n : $u_n = 500\times1{,}04^n$

Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0.
Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0\times q^n$.

Démonstration :

La suite géométrique (u_n) de raison q et de premier terme u_0 vérifie la relation $u_{n+1} = q\times u_n$.

En calculant les premiers termes :

$u_1 = q\times u_0$

$u_2 = q\times u_1 = q\times\left(q\times u_0\right) = q^2\times u_0$

$u_3 = q\times u_2 = q\times\left(q^2\times u_0\right) = q^3\times u_0$

…

$u_n = q\times u_{n-1} = q\times\left(q^{n-1}u_0\right) = q^n\times u_0$.

Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique

Vidéo https://youtu.be/wUfleWpRr10

Considérons la suite géométrique (u_n) tel que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite sont de la forme $u_n = q^n\times u_0$

Ainsi $u_4 = q^4\times u_0 = 8$ et $u_7 = q^7\times u_0 = 512$.

Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{q^7 \times u_0}{q^4 \times u_0} = q^3$ et $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$

Comme $q^4 \times u_0 = 8$, on a : $4^4 \times u_0 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$.

2) Variations

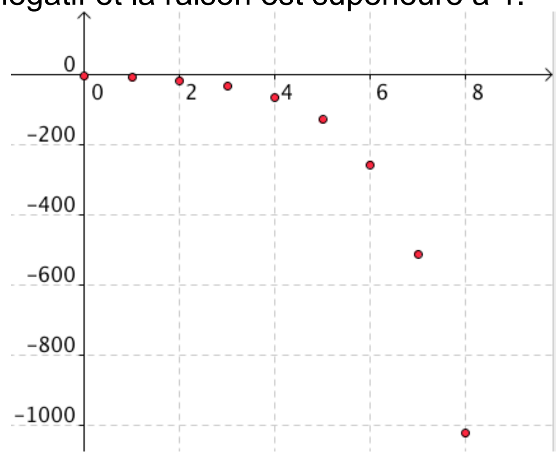
Propriété : (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme non nul u_0.
Pour $u_0 > 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est décroissante.

Pour $u_0 < 0$:
- Si q > 1 alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si 0 < q < 1 alors la suite (u_n) est croissante.

Démonstration dans le cas où u_0 > 0 :
$u_{n+1} - u_n = q^{n+1}u_0 - q^n u_0 = u_0 q^n (q-1)$.
- Si q > 1 alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si 0 < q < 1 alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

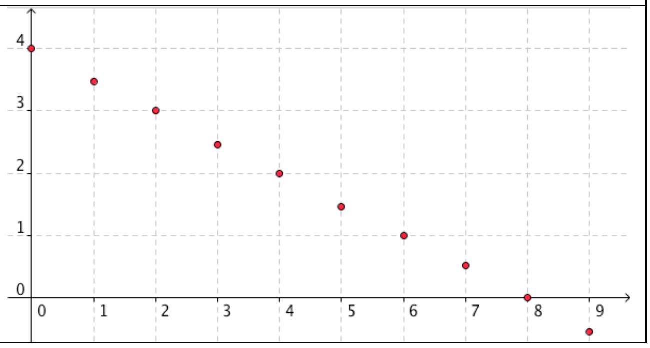
Exemple :
Vidéo https://youtu.be/vLshnJqW-64

La suite géométrique (u_n) définie par $u_n = -4 \times 2^n$ est décroissante car le premier terme est négatif et la raison est supérieure à 1.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

Remarque : Si la raison q est négative alors la suite géométrique n'est pas monotone.

RÉSUMÉS	(u_n) une **suite arithmétique** - de **raison** r - de premier terme u_0.	**Exemple :** $r=-0,5$ et $u_0=4$
Définition	$u_{n+1}=u_n+r$	$u_{n+1}=u_n-0,5$ La différence entre un terme et son précédent est égale à -0,5.
Propriété	$u_n=u_0+nr$	$u_n=4-0,5n$
Variations	Si $r>0$: (u_n) est croissante. Si $r<0$: (u_n) est décroissante.	$r=-0,5<0$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Les points de la représentation graphique sont alignés.	

	(u_n) une **suite géométrique** de **raison** q de premier terme u_0.	**Exemple :** $q=2$ et $u_0=-4$
Définition	$u_{n+1}=q\times u_n$	$u_{n+1}=2\times u_n$ Le rapport entre un terme et son précédent est égal à 2.
Propriété	$u_n=u_0\times q^n$	$u_n=-4\times 2^n$
Variations	Pour $u_0>0$: Si $q>1$: (u_n) est croissante. Si $0<q<1$: (u_n) est décroissante. Pour $u_0<0$: Si $q>1$: (u_n) est décroissante. Si $0<q<1$: (u_n) est croissante.	$u_0=-4<0$ $q=2>1$ La suite (u_n) est décroissante.
Représentation graphique	Remarque : Si $q<0$: la suite géométrique n'est ni croissante ni décroissante.