GÉNÉRALITÉS SUR LES SUITES

Dès l'Antiquité, *Archimède de Syracuse* (-287 ; -212), met en œuvre une procédure itérative pour trouver une approximation du nombre π. Il encadre le cercle par des polygones inscrits et circonscrits possédant un nombre de côtés de plus en plus grand. Par ce procédé, *Archimède* donne naissance, sans le savoir, à la notion de suite numérique.

Vers la fin du XVIIe siècle, des méthodes semblables sont utilisées pour résoudre des équations de façon approchée pour des problèmes de longueurs, d'aires, …
Un formalisme plus rigoureux de la notion de suite n'apparaitra qu'au début du XIXe siècle avec le mathématicien français *Augustin Louis Cauchy* (1789 ; 1857) – *ci-contre*.

I. Définition et représentation graphique

1) Définition d'une suite numérique

Exemple d'introduction :
On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …
On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :
u_0 = 1, u_1 = 3, u_2 = 5, u_3 = 7, …
On a ainsi défini une suite numérique.
On peut lui associer une fonction définie sur $\mathbb{N}$ par u : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) = u_n \end{array}$

Définitions : Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.
u_n est appelé le terme de rang n de cette suite (ou d'indice n).

2) Générer une suite numérique par une formule explicite

Vidéo https://youtu.be/HacfIVQ7DIE

Exemples :
- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n$ qui définit la suite des nombres pairs.

Les premiers termes de cette suite sont donc :
u_0 = 2 x 0 = 0,
u_1 = 2 x 1 = 2,
u_2 = 2 x 2 = 4,
u_3 = 2 x 3 = 6.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
v_0 = $3 \times 0^2 - 1$ = -1,
v_1 = $3 \times 1^2 - 1$ = 2,
v_2 = $3 \times 2^2 - 1$ = 11,
v_3 = $3 \times 3^2 - 1$ = 26.

Lorsqu'on génère une suite par une formule explicite, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

3) Générer une suite numérique par une relation de récurrence

Exemples :
- On définit la suite (u_n) par :
u_0 = 5 et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
u_0 = 5,
u_1 = 3 x u_0 = 3 x 5 = 15,
u_2 = 3 x u_1 = 3 x 15 = 45.

- On définit la suite (v_n) par :
v_0 = 3 et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
v_0 = 3,
$v_1 = 4v_0 - 6$ = 4 x 3 – 6 = 6,
$v_2 = 4v_1 - 6$ = 4 x 6 – 6 = 18,
$v_3 = 4v_2 - 6$ = 4 x 18 – 6 = 66.

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

Vidéos dans la Playlist :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoqExMkHrhYvWi4dHnApgG_

Sur TI :

```
PROGRAM : SUITE
: Input "N=?",N
: 3→u
: For(I,1,N)
: 4*u–6→u
: End
: Disp u
```

```
PrgmSUITE
N=?13
        67108866
        Fait
```

Sur Casio :

```
======SUITE======
?→N↵
3→u↵
For 1→I To N↵
4*u–6→u↵
Next↵
u◢
```

```
?
13
  67108866
  -Disp-
```

- On définit la suite (w_n) par :
pour tout n de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, $w_n = 1+2+3+...+n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
w_1 = 1,
$w_2 = w_1 + 2$ = 1 + 2 = 3,
$w_3 = w_2 + 3$ = 3 + 3 = 6,
$w_4 = w_3 + 4$ = 6 + 4 = 10.

Lorsqu'on génère une suite par une relation de récurrence, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents.

A noter : Le mot *récurrence* vient du latin *recurrere* qui signifie "revenir en arrière".

4) Représentation graphique d'une suite

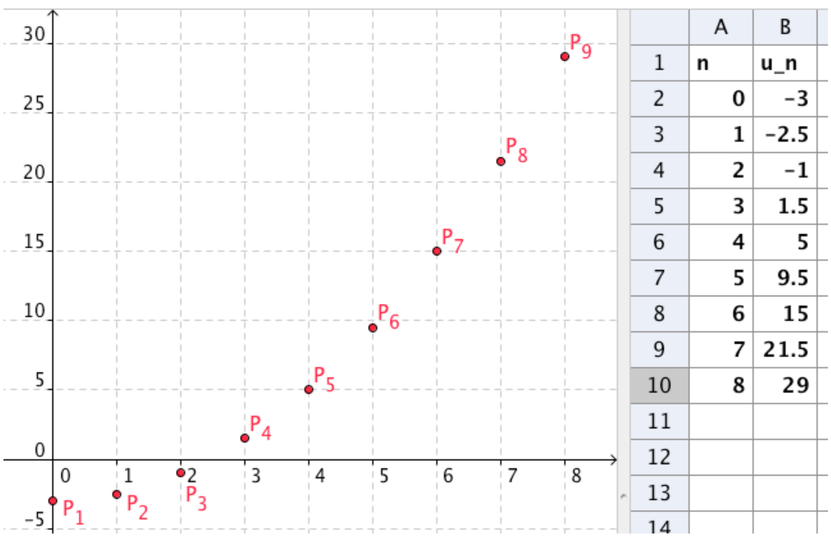
Vidéos n°7 à 10 :
https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoqExMkHrhYvWi4dHnApgG_

Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n;u_n)$.

Exemple :

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = \frac{n^2}{2} - 3$.
On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29



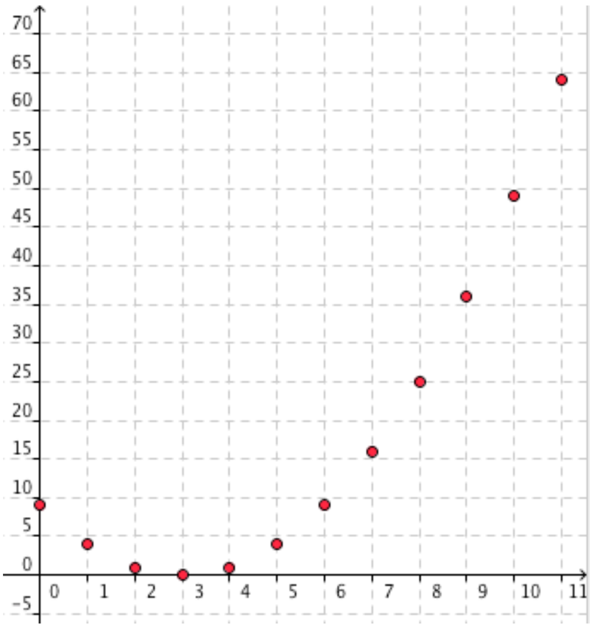
	A	B
1	n	u_n
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29
11		
12		
13		
14		

Il est aisé d'obtenir un nuage de points à l'aide d'un logiciel.

II. Sens de variation d'une suite numérique

Exemple :

On a représenté ci-dessous le nuage de points des premiers termes d'une suite (u_n) :



	A	B
1	n	u_n
2	0	9
3	1	4
4	2	1
5	3	0
6	4	1
7	5	4
8	6	9
9	7	16
10	8	25
11	9	36
12	10	49
13	11	64
14		
15		
16		

On peut conjecturer que cette suite est croissante pour $n \geq 3$.

Définitions : Soit un entier p et une suite numérique (u_n).
- La suite (u_n) est croissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est décroissante à partir du rang p signifie que pour $n \geq p$, on a $u_{n+1} \leq u_n$.

Méthode : Etudier les variations d'une suite

Vidéo https://youtu.be/DFz8LDKCw9Y
Vidéo https://youtu.be/R8a60pQwiOQ

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 - 4n + 4$.
Démontrer que la suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang.

On commence par calculer la différence $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - 4(n+1) + 4 - n^2 + 4n - 4$

$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 + 4 - n^2 + 4n - 4$

$= 2n - 3$

On étudie ensuite le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$u_{n+1} - u_n \geq 0$ pour $2n - 3 \geq 0$ donc pour $n \geq 1,5$.
Ainsi pour $n \geq 2$ (n est entier), on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
On en déduit qu'à partir du rang 2, la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$ *, on donne la suite (v_n) définie par : $v_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

Démontrer que la suite (v_n) est décroissante.

On commence par calculer le rapport $\dfrac{v_{n+1}}{v_n}$:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+2}.$$

Or $0 \leq n < n+2$, on a : $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ et donc $v_{n+1} - v_n < 0$.

On en déduit que (v_n) est décroissante.

<u>Propriété :</u> Soit une fonction f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ et une suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. Soit un entier p.
- Si f est croissante sur l'intervalle $\left[p;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si f est décroissante sur l'intervalle $\left[p;+\infty\right[$, alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

<u>Démonstration :</u>
- f est croissante sur $\left[p;+\infty\right[$ donc par définition d'une fonction croissante, on a pour tout entier $n \geq p$: comme $n+1 > n$, $f(n+1) \geq f(n)$ et donc $u_{n+1} \geq u_n$.
- Démonstration analogue pour la décroissance.

<u>Méthode :</u> Etudier les variations d'une suite à l'aide de la fonction associée

Vidéo https://youtu.be/dPR3GyQycH0

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

On considère la fonction associée f définie sur $\left[0;+\infty\right[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Ainsi $u_n = f(n)$.

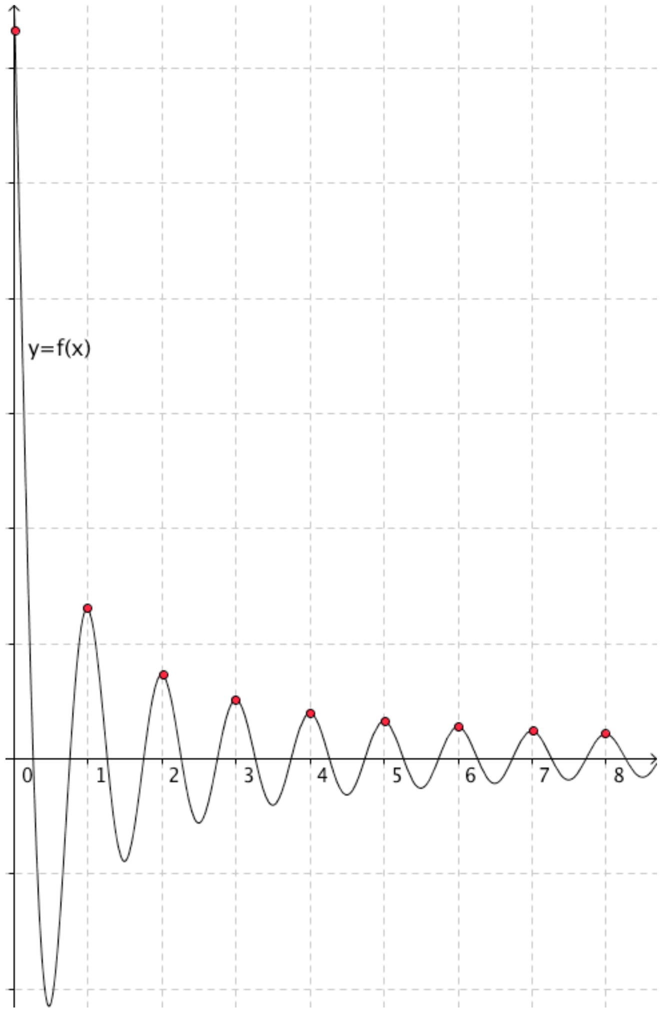
Etudions les variations de f définie sur $\left[0;+\infty\right[$:

$f'(x)=\dfrac{-1}{(x+1)^2}$.

Pour tout x de $\left[0;+\infty\right[$, on a : $f'(x)<0$.

Donc f est décroissante sur $\left[0;+\infty\right[$. On en déduit que (u_n) est décroissante.

<u>Remarque :</u>
La réciproque de la propriété énoncée plus haut est fausse.
La représentation suivante montre une suite décroissante alors que la fonction f n'est pas monotone.



III. Notion de limite d'une suite

1) Suite convergente

Exemple :

Pour tout n de $\mathbb{N}\setminus\{0\}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{2n+1}{n}$.

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent se rapprocher de 2.
On dit que la suite (u_n) converge vers 2 et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

2) Suite divergente

Exemples :

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2+1$.

Calculons quelques termes de cette suite :
$u_0 = 0^2 + 1 = 1$,
$u_1 = 1^2 + 1 = 2$,
$u_2 = 2^2 + 1 = 5$,
$u_{10} = 10^2 + 1 = 101$,
$u_{100} = 100^2 + 1 = 10001$,

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.
On dit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = (-1)^n v_n$ et $v_0 = 2$

Calculons les premiers termes de cette suite :

$v_1 = (-1)^0 v_0 = 2$

$v_2 = (-1)^1 v_1 = -2$

$v_3 = (-1)^2 v_2 = -2$

$v_4 = (-1)^3 v_3 = 2$

$v_5 = (-1)^4 v_4 = 2$

Lorsque n devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite (u_n) diverge.