SECOND DEGRÉ (Partie 1)

I. Fonction polynôme de degré 2

1) Définition

Exemples et contre-exemples :

- $f(x)=3x^2-7x+3$
- $g(x)=x^2-5x+4$
- $h(x)=4-2x^2$
- $k(x)=(x-4)(5-2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

- $m(x)=5x-3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x)=5x^4-3x^3+6x-8$ est une fonction polynôme de degré 4.

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

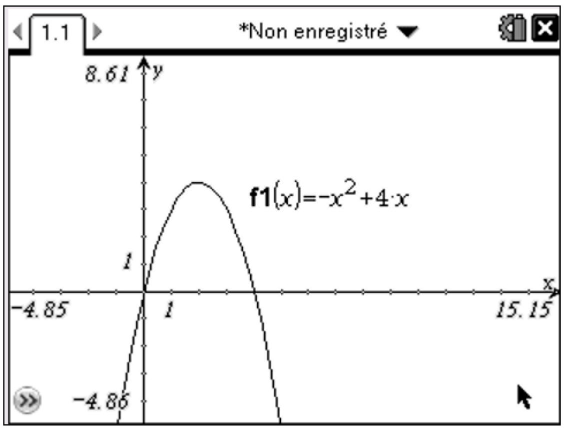
$$f(x)=ax^2+bx+c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

2) Représentation graphique

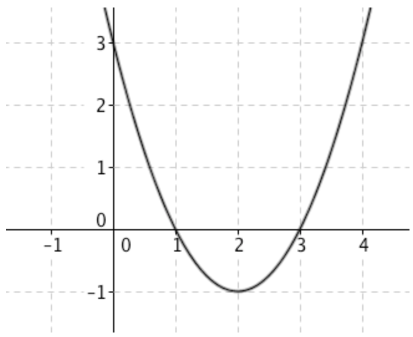
Exemple :



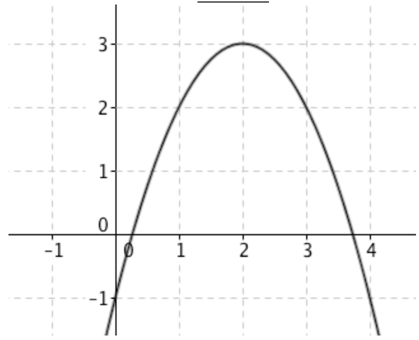
La représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

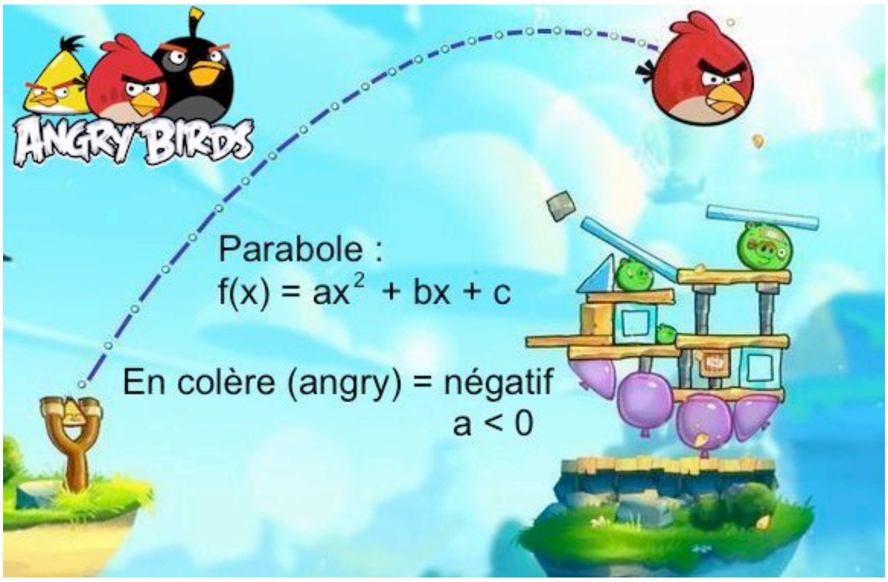
Propriétés :
Soit f une fonction polynôme de degré 2, telle que $f(x)=ax^2+bx+c$.
- Si a est positif, f est d'abord décroissante, puis croissante : « *cuvette* ».
- Si a est négatif, f est d'abord croissante, puis décroissante : « *colline* ».

$a > 0$



$a < 0$





II. Résolution d'une équation du second degré

Exemple :
L'équation $3x^2-6x-2=0$ est une équation du second degré.

Définition : Une équation du second degré est une équation de la forme $ax^2+bx+c=0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Définition : On appelle discriminant du trinôme ax^2+bx+c, le nombre réel, noté Δ, égal à b^2-4ac.

Exemple :
Le discriminant de l'équation $3x^2-6x-2=0$ est :
$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 3 \times (-2) = 36 + 24 = 60$. En effet, a = 3, b = -6 et c = -2.

Propriété : Soit Δ le discriminant du trinôme ax^2+bx+c.
- Si Δ < 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ n'a pas de solution réelle.
- Si Δ = 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a une unique solution : $x_0=-\dfrac{b}{2a}$.
- Si Δ > 0 : L'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Remarque :
Les solutions d'une équation du second degré s'appellent les racines de ax^2+bx+c.

Méthode : Résoudre une équation du second degré

Vidéo https://youtu.be/youUIZ-wsYk
Vidéo https://youtu.be/RhHheS2Wpyk
Vidéo https://youtu.be/v6fI2RqCCiE

Résoudre les équations suivantes :
a) $2x^2-x-6=0$ b) $4x^2-12x+9=0$ c) $x^2+3x+10=0$

a) Calculons le discriminant de l'équation $2x^2-x-6=0$:
a = 2, b = -1 et c = -6 donc Δ = b^2 – 4ac = (-1)^2 – 4 x 2 x (-6) = 1 + 48 = 49.

Comme Δ > 0, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times 2}=-\frac{3}{2}$$

$$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times 2}=2$$

b) Calculons le discriminant de l'équation $4x^2-12x+9=0$:
a = 4, b = -12 et c = 9 donc Δ = b^2 – 4ac = (-12)^2 – 4 x 4 x 9 = 144 – 144 = 0.

Comme Δ = 0, l'équation possède une unique solution :

$$x_0=-\frac{b}{2a}=-\frac{-12}{2\times 4}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

c) Calculons le discriminant de l'équation $x^2+3x+10=0$:
a = 1, b = 3 et c = 10 donc Δ = b^2 – 4ac = 3^2 – 4 x 1 x 10 = 9 – 40 = -31.

Comme Δ < 0, l'équation ne possède pas de solution réelle.