SECOND DEGRÉ (Partie 1)

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :

- $f(x) = 3x^2 - 7x + 3$,
- $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x + \frac{5}{3}$,
- $h(x) = 4 - 2x^2$
- $k(x) = (x-4)(5-2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.
- $m(x) = 5x - 3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).
- $n(x) = 5x^4 - 3x^3 + 6x - 8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Propriété : Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta \text{, où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres réels.}$$

Cette dernière écriture s'appelle la forme canonique de f.

La forme canonique d'une fonction est de la forme :

$f(x) =$ ☺$(x$ - ☺$)^2$ + ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

Exemples :

$f(x) = 3(2x-1)^2 + 4$ $\quad$ $g(x) = -2(x+5)^2 - 4$ $\quad$ $h(x) = -(3x-5)^2 - \frac{1}{2}$

Méthode : Démontrer qu'une expression est la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/M3vCMgYzvM8

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-20x+10$.

Démontrer que $2(x-5)^2-40$ est la forme canonique de f.

$$2(x-5)^2-40$$
$$=2\left(x^2-10x+25\right)-40$$
$$=2x^2-20x+50-40$$
$$=2x^2-20x+10$$
$$=f(x)$$

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x)=2(x-1)^2+3$

Alors : $f(x)\geq 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.

Or $f(1)=3$ donc pour tout x, $f(x)\geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a\neq 0$.

- Si $a>0$, f admet un minimum pour $x=\alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a<0$, f admet un maximum pour $x=\alpha$. Ce minimum est égal à β.

Remarque :

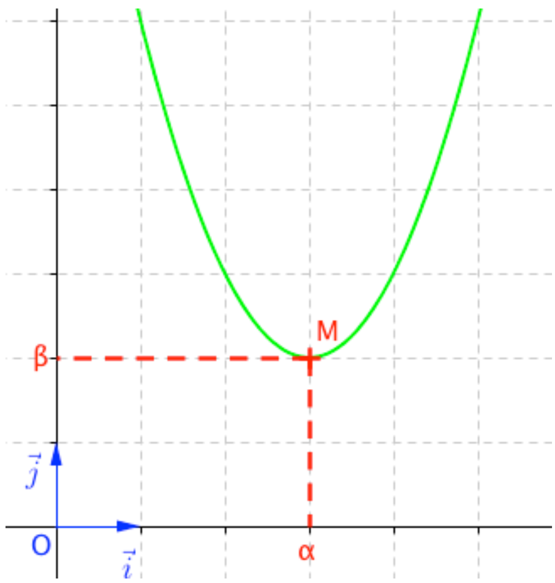
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x)=ax^2+bx+c$, avec $a\neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x=-\dfrac{b}{2a}$.

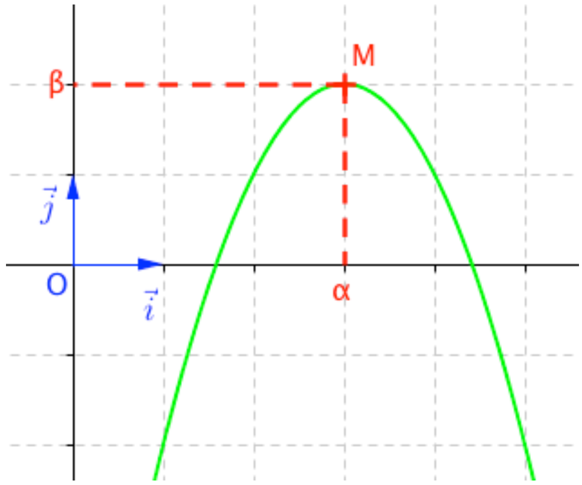
- Si $a>0$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	↘	β	↗

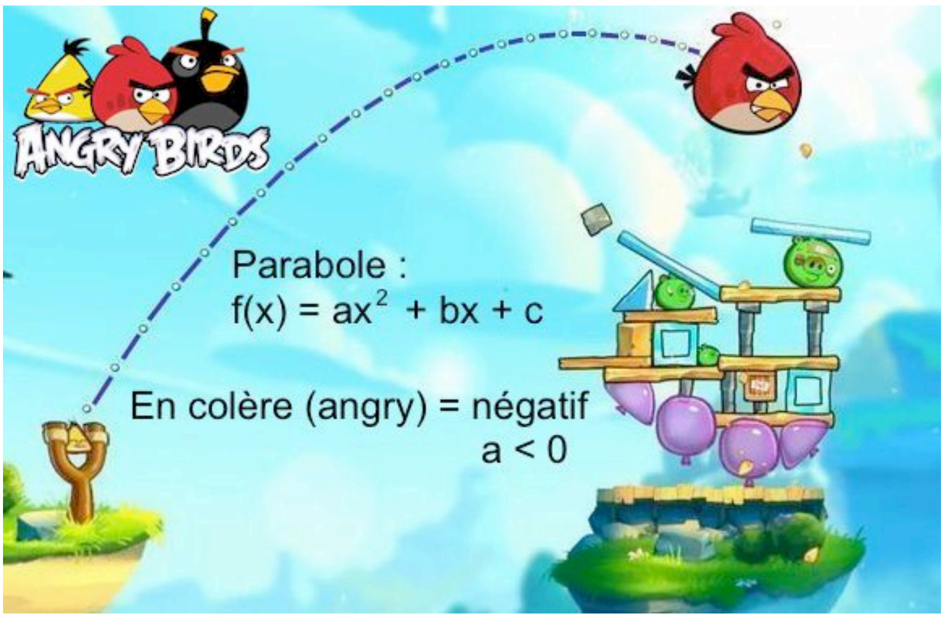


- Si $a<0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		↗	β	↘	



Dans un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.
M est le sommet de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.
La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite d'équation $x=\alpha$.



Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/pXWDPw3B3ms

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+4x$.

1) Démontrer que $-(x-2)^2+4$ est la forme canonique de f.

2) Représenter graphiquement la fonction f.

1)

$-(x-2)^2+4$

$=-\left(x^2-4x+4\right)+4$

$=-x^2+4x-4+4$

$=-x^2+4x$

$=f(x)$

2) On a donc $f(x) = -(x-2)^2 + 4$

f admet donc un maximum pour $x = 2$. Ce maximum est égal à égal à 4.

Il est possible de le vérifier : $f(2)=-(2-2)^2+4=4$.

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	4	$\searrow$

On obtient la courbe représentative de f :