SECOND DEGRÉ (Partie 1)

I. Fonction polynôme de degré 2

Définition : On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

où les coefficients a, b et c sont des réels donnés avec $a \neq 0$.

Remarque :
Une fonction polynôme de degré 2 s'appelle également fonction trinôme du second degré ou par abus de langage "trinôme".

Exemples et contre-exemples :
- $f(x)=3x^2-7x+3$,
- $g(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+\frac{5}{3}$,
- $h(x)=4-2x^2$
- $k(x)=(x-4)(5-2x)$ sont des fonctions polynômes de degré 2.

- $m(x)=5x-3$ est une fonction polynôme de degré 1 (fonction affine).

- $n(x)=5x^4-3x^3+6x-8$ est une fonction polynôme de degré 4.

II. Forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Méthode : Déterminer la forme canonique d'une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/OQHf-hX9JhM

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2x^2-20x+10$.

On veut exprimer la fonction f sous sa forme canonique :

$f(x)=$ ☺$(x$ - ☺$)^2$ + ☺

où ☺, ☺ et ☺ sont des nombres réels.

$$f(x)=2x^2-20x+10$$
$$=2\left[x^2-10x\right]+10$$
$$=2\left[x^2-10x+25-25\right]+10$$
$$=2\left[(x-5)^2-25\right]+10$$

car x^2-10x est le début du développement de $(x-5)^2$

et $(x-5)^2=x^2-10x+25$

$= 2(x-5)^2 - 50 + 10$

$= 2(x-5)^2 - 40$

$f(x) = 2(x-5)^2 - 40$ est la forme canonique de f.

Propriété : Toute fonction polynôme f de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme :

$f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, où α et β sont deux nombres réels.

Cette dernière écriture s'appelle la forme canonique de f.

Démonstration :

Comme $a \neq 0$, on peut écrire pour tout réel x :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c$$

$$= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$= a(x-\alpha)^2 + \beta$$

avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

III. Variations et représentation graphique

Exemple : Soit la fonction f donnée sous sa forme canonique par : $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$

Alors : $f(x) \geq 3$ car $2(x-1)^2$ est positif.

Or $f(1) = 3$ donc pour tout x, $f(x) \geq f(1)$.

f admet donc un minimum en 1. Ce minimum est égal à 3.

Propriété :

Soit f une fonction polynôme de degré 2 définie par $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, avec $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, f admet un minimum pour $x = \alpha$. Ce minimum est égal à β.
- Si $a < 0$, f admet un maximum pour $x = \alpha$. Ce maximum est égal à β.

Remarque :

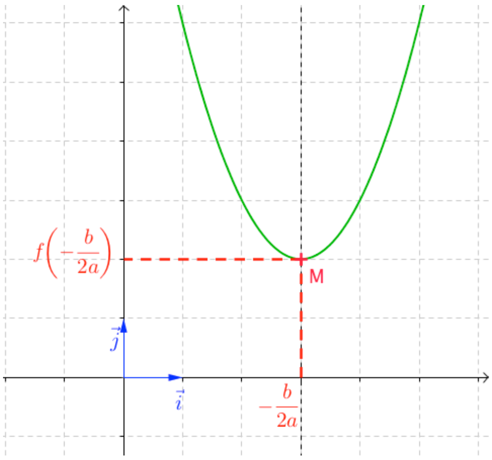
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

On peut retenir que f admet un maximum (ou un minimum) pour $x = -\dfrac{b}{2a}$.

(voir résultat de la démonstration dans II.)

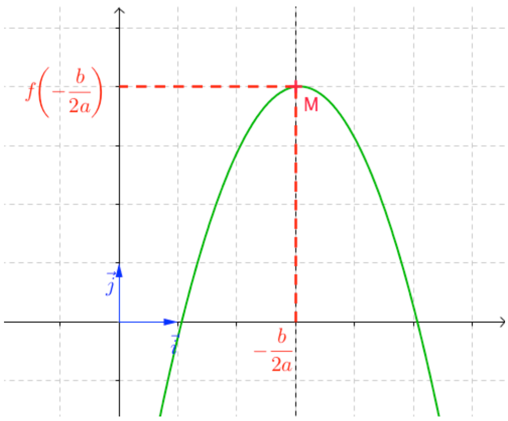
- Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\nearrow$	



- Si $a < 0$:

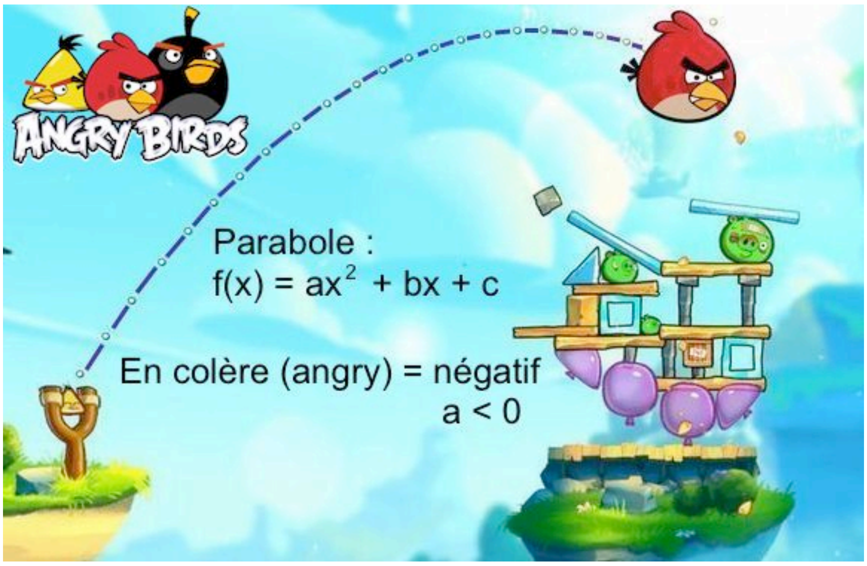
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$	$\searrow$	



Dans un repère orthogonal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole.

M est le sommet de la parabole. Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.

La parabole possède un axe de symétrie. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\dfrac{b}{2a}$.



Méthode : Représenter graphiquement une fonction polynôme de degré 2

Vidéo https://youtu.be/KK76UohzUW4

Représenter graphiquement la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

Commençons par écrire la fonction f sous sa forme canonique :

$f(x) = -x^2 + 4x$

$= -\left(x^2 - 4x\right)$

$= -\left(x^2 - 4x + 4 - 4\right)$

$= -\left(\left(x-2\right)^2 - 4\right)$

$= -\left(x-2\right)^2 + 4$

f admet donc un maximum en 2 égal à

$f(2) = -\left(2-2\right)^2 + 4 = 4$

Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↗	4	↘

On obtient la courbe représentative de f :