FONCTIONS RATIONNELLES

I. Dérivées des fonctions rationnelles

1) Fonction inverse

Méthode : Dériver la fonction inverse

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f(x)=5x^3+\frac{1}{x}$ $\quad$ $g(x)=3x^2-\frac{1}{x}$ $\quad$ $h(x)=-6x^2+5x+\frac{4}{x}$

$$f'(x)=5\times 3x^2-\frac{1}{x^2}$$
$$=15x^2-\frac{1}{x^2}$$

$$g'(x)=3\times 2x+\frac{1}{x^2}$$
$$=6x+\frac{1}{x^2}$$

Si $f(x)=\frac{1}{x}$

Alors $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

$$h'(x)=-6\times 2x+5-\frac{4}{x^2}$$
$$=-12x+5-\frac{4}{x^2}$$

2) Fonctions rationnelles

Méthode : Dériver des fonctions rationnelles

Vidéo https://youtu.be/-MfEczGz_6Y

Calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

a) $f(x)=\frac{x+1}{x-5}$ $\quad$ b) $g(x)=\frac{2x-5}{x}$ $\quad$ c) $h(x)=\frac{6x-5}{x^2-1}$

a) $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=x+1 \rightarrow u'(x)=1$

$v(x)=x-5 \rightarrow v'(x)=1$

Si $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$

Alors $f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$

Donc :

$$h'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{\left(v(x)\right)^2}$$

$$= \frac{1\times(x-5)-(x+1)\times 1}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{x-5-x-1}{(x-5)^2}$$

$$= \frac{-6}{(x-5)^2}$$

b) $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 2x-5 \rightarrow u'(x) = 2$

$v(x) = x \rightarrow v'(x) = 1$

Donc :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{2\times x-(2x-5)\times 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x-2x+5}{x^2}$$

$$= \frac{5}{x^2}$$

c) $h(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x) = 6x-5 \rightarrow u'(x) = 6$

$v(x) = x^2-1 \rightarrow v'(x) = 2x$

Donc :

$$h'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$= \frac{6(x^2-1)-(6x-5)2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{6x^2-6-12x^2+10x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{-6x^2+10x-6}{(x^2-1)^2}$$

II. Variations des fonctions rationnelles

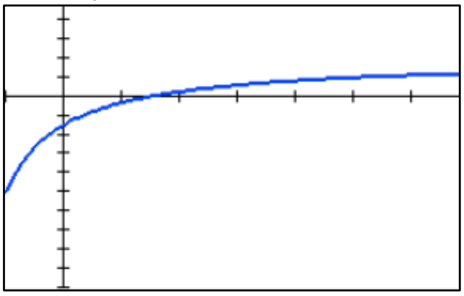
Méthode : Étudier les variations d'une fonction rationnelle

Vidéo https://youtu.be/ZDfYS9xQJDo

Soit la fonction f définie sur [-1 ; 5] par $f(x)=\frac{2x-3}{x+2}$.

1) Calculer la fonction dérivée de f.
2) Déterminer le signe de f'.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) a) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f en $x=0$.
   b) Tracer la courbe et la tangente.
5) Résoudre graphiquement l'équation $f(x)=0$. Vérifier par calcul.

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



1) $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)=2x-3 \rightarrow u'(x)=2$

$v(x)=x+2 \rightarrow v'(x)=1$

Donc :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$=\frac{2\times(x+2)-(2x-3)\times 1}{(x+2)^2}$$

$$=\frac{2x+4-2x+3}{(x+2)^2}=\frac{7}{(x+2)^2}$$

2) Or, un carré étant toujours positif, $(x+2)^2 \geq 0$ et donc $f'(x)>0$.

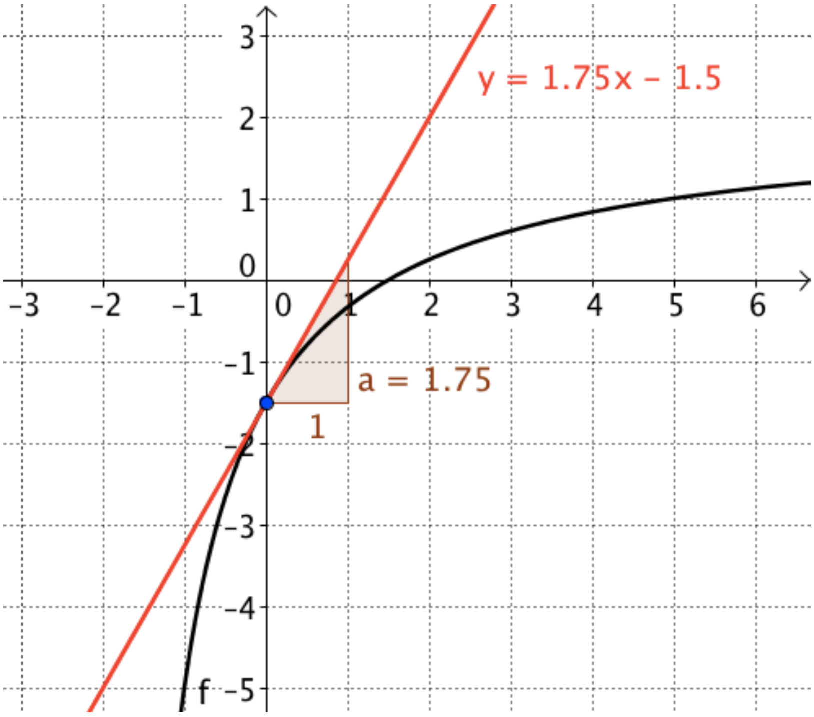
3) On dresse alors le tableau de variations :

x	-1	5
f'	+	
f	-5 ↗	1

En effet : $f(-1)=\dfrac{2\times(-1)-3}{-1+2}=-5$ et $f(5)=\dfrac{2\times 5-3}{5+2}=1$

4) a) A l'aide de la calculatrice, on trouve : $y=1,75x-1,5$

b)



5) La solution de l'équation $f(x)=0$ se lit graphiquement en regardant l'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses. On trouve : $x=1,5$.

Vérifions par calcul :

$$f(x)=0$$
$$\frac{2x-3}{x+2}=0$$
$$2x-3=0$$
$$2x=3$$
$$x=\frac{3}{2}=1,5$$