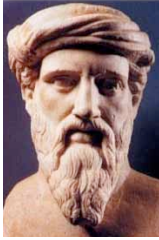


RACINES CARREES (Partie 1)



La devise pythagoricienne était « Tout est nombre » au sens de nombres rationnels (quotient de deux entiers).

L'erreur des pythagoriciens est d'avoir toujours nié l'existence des nombres irrationnels.

Par la diagonale d'un carré de côté 1, ils trouvent le nombre inexprimable $\sqrt{2}$ qui étonne puis bouleverse les pythagoriciens. Dans un carré d'une telle simplicité niche un nombre indicible et jamais rencontré jusqu'alors. Cette découverte doit rester secrète pour ne pas rompre le fondement même de la Fraternité pythagoricienne jusqu'à ce qu'un des membres, *Hippase de Métaponte*, trahisse le secret. Celui-ci périt "curieusement" dans un naufrage !

Origine du symbole :

Ile siècle : 112 = côté d'un carré d'aire 12 (l comme *latus* = côté en latin)

1525, Christoph RUDOLFF, all. : $\sqrt{12}$ (vient du r de racine)

XVIe siècle, Michael STIFEL, all. : $\sqrt{12}$ (combinaison du « v » de Rudolff et de la barre « $\sqrt{\quad}$ » ancêtre des parenthèses)

I. La famille des racines carrées

1) Définition

Exemples : $3^2 = 9$ donc $\sqrt{9} = 3$
 $2,6^2 = 6,76$ donc $\sqrt{6,76} = 2,6$

La racine carrée de a est le nombre (toujours positif) dont le carré est a .

Remarque :

$$\sqrt{-5} = ?$$

La racine carrée de -5 est le nombre dont le carré est -5.

Un nombre au carré est toujours positif (règle des signes), donc la racine carrée d'un nombre négatif est impossible.

$\sqrt{-5}$ n'existe pas !

2) Quelques nombres de la famille des racines carrées

$$\sqrt{0} = 0$$

$$\sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{2} \approx 1,4142 \quad (\text{nombres ni décimaux, ni rationnels !})$$

$$\sqrt{3} \approx 1,732$$

3) Racines de carrés parfaits

| | | |
|-----------------|-----------------|-------------------|
| $\sqrt{4} = 2$ | $\sqrt{36} = 6$ | $\sqrt{100} = 10$ |
| $\sqrt{9} = 3$ | $\sqrt{49} = 7$ | $\sqrt{121} = 11$ |
| $\sqrt{16} = 4$ | $\sqrt{64} = 8$ | $\sqrt{144} = 12$ |
| $\sqrt{25} = 5$ | $\sqrt{81} = 9$ | $\sqrt{169} = 13$ |

Exercices conseillés En devoir

| | |
|---------------------------|-----------|
| p66 n°19 à 23 p66 n°35 | p70 n°101 |
|---------------------------|-----------|

4) Racines carrées d'un nombre au carré

Exemples : $\sqrt{3^2} = \sqrt{9} = 3$
 $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$
 $\sqrt{9^2} = \sqrt{81} = 9$

Pour un nombre positif a , $\sqrt{a^2} = a$
 La racine « annule » le carré.

Exercices conseillés En devoir

| | |
|----------|--|
| p66 n°34 | |
|----------|--|

II. Opération sur les racines carrées

1) Exemples

| a | b | \sqrt{a} | \sqrt{b} | $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ | $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ | $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ | $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ | $\sqrt{a+b}$ | $\sqrt{a-b}$ | $\sqrt{a \times b}$ | $\sqrt{\frac{a}{b}}$ |
|-----|-----|------------|------------|-----------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------------|--------------|--------------|---------------------|----------------------|
| 9 | 16 | 3 | 4 | 7 | -1 | 12 | 0,75 | 5 | Imp. | 12 | 0,75 |
| 25 | 4 | 5 | 2 | 7 | 3 | 10 | 2,5 | ≈5,4 | ≈4,6 | 10 | 2,5 |
| 36 | 16 | 6 | 4 | 10 | 2 | 24 | 1,5 | ≈7,2 | ≈4,5 | 24 | 1,5 |

2) Formules

$$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

Attention :

Les « non-formules » : $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$ et $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq \sqrt{a-b}$

3) Carré d'une racine carrée

$$(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} = \sqrt{a \times a} = \sqrt{a^2} = a$$

Pour un nombre positif a , $(\sqrt{a})^2 = a$

Le carré « annule » la racine.

| Exercices conseillés | En devoir |
|----------------------------|----------------|
| p66 n°27 à 29 p72 n°134 | p70 n°103, 104 |

Méthode :

Ecrire le plus simplement possible :

$$A = \sqrt{32} \times \sqrt{2}$$

$$B = \sqrt{3} \times \sqrt{27}$$

$$C = \sqrt{3} \times \sqrt{36} \times \sqrt{3}$$

$$D = \frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$$

$$E = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{72}}$$

$$F = (4\sqrt{5})^2$$

$$G = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{10}}{\sqrt{80}}$$

$$A = \sqrt{32 \times 2} = \sqrt{64} = 8$$

$$B = \sqrt{3 \times 27} = \sqrt{81} = 9$$

$$C = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{36} = 3 \times 6 = 18$$

$$D = \sqrt{\frac{98}{2}} = \sqrt{49} = 7$$

$$E = \sqrt{\frac{50}{72}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \frac{5}{6}$$

$$F = 16 \times (\sqrt{5})^2 = 16 \times 5 = 80$$

$$G = \sqrt{\frac{32 \times 10}{80}} = \sqrt{4} = 2$$

| Exercices conseillés | En devoir |
|----------------------------|----------------|
| p67 n°38 à 41 p71 n°108 | p71 n°109, 110 |

4) Extraire un carré parfait

Méthode :

Ecrire sous la forme $a\sqrt{b}$, avec a et b entiers et b étant le plus petit possible :

$$A = \sqrt{72} \quad B = \sqrt{45} \quad C = 3\sqrt{125}$$

$$A = \sqrt{72}$$

$$= \sqrt{9 \times 8} \quad \leftarrow \text{On fait « apparaître » dans 72 un carré parfait : 9.}$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{8} \quad \leftarrow \text{On extrait cette racine en appliquant une formule.}$$

$$= 3 \times \sqrt{8} \quad \leftarrow \text{On simplifie la racine du carré parfait.}$$

$$= 3 \times \sqrt{4 \times 2} \quad \leftarrow \text{On recommence si possible.}$$

$$= 3 \times \sqrt{4} \times \sqrt{2}$$

$$= 3 \times 2 \times \sqrt{2}$$

$$= 6\sqrt{2} \quad \leftarrow \text{On s'arrête, 2 ne « contient » pas de carré parfait.}$$

$$B = \sqrt{45}$$

$$= \sqrt{9 \times 5}$$

$$= 3\sqrt{5}$$

$$C = 3\sqrt{125}$$

$$= 3 \sqrt{25 \times 5}$$

$$= 3 \times 5 \sqrt{5}$$

$$= 15\sqrt{5}$$

Remarque :

Pour que b soit le plus petit possible, b ne doit pas contenir de carré parfait.

| Exercices conseillés | En devoir |
|--|--------------|
| p64 n°1 et 2 p67 n°42 à 44 p64 n°5 et 6 p73 n°141 | p64 n°3 et 4 |

III. Application à la résolution d'équations

Exercices conseillés

| | |
|----------|--|
| p61 Act4 | |
|----------|--|

Exemple :

Résoudre l'équation $x^2 = 5$

$$x^2 = 5$$

$$x^2 - 5 = 0$$

$$(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) = 0$$

Un produit de facteur est nul si l'un au moins des facteurs est nul.

$$x - \sqrt{5} = 0 \quad \text{ou} \quad x + \sqrt{5} = 0$$

$$x = \sqrt{5} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{5}$$

$$S = \{ \sqrt{5}; -\sqrt{5} \}$$

Les solutions de l'équation $x^2 = a$
sont $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} .

Dans la pratique, on applique directement la propriété !

Méthode :

Résoudre les équations suivantes :

1) $x^2 = 3$ 2) $2x^2 = 32$ 3) $(x - 3)^2 = 9$

1) $x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

Les solutions sont $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

2) $2x^2 = 32$

$$x^2 = 16$$

$$x = -\sqrt{16} \quad \text{ou} \quad x = \sqrt{16}$$

$$x = -4 \quad \text{ou} \quad x = 4$$

Les solutions sont -4 et 4.

$$3) (x-3)^2 = 9$$

$$x-3 = -\sqrt{9} \text{ ou } x-3 = \sqrt{9}$$

$$x-3 = -3 \text{ ou } x-3 = 3$$

$$x = 3-3 \text{ ou } x = 3+3$$

$$x = 0 \text{ ou } x = 6$$

Les solutions sont 0 et 6.

| Exercices conseillés | En devoir |
|---|---------------|
| p65 n°11 à 18 p68 n°57 à 61 p68 n°67, 68, 73 | p68 n°54 à 56 |

Activité de groupe : T.P. sur la calculatrice
http://www.maths-et-tiques.fr/telech/TP_CALC.pdf



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales