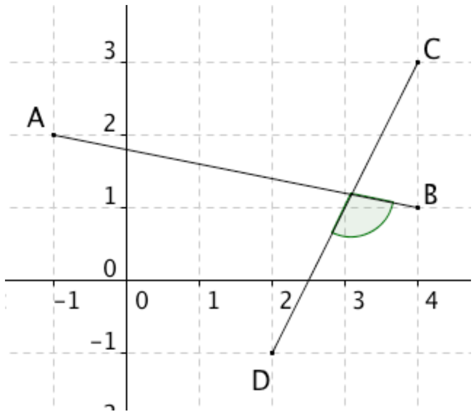
# APPLICATIONS
# DU PRODUIT SCALAIRE

## I. Calculs d'angles et de longueurs

### 1) Calculs d'angles

Méthode : Déterminer un angle à l'aide du produit scalaire

**Vidéo** https://youtu.be/ca_pW79ik9A




Calculer la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$.

On a :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\left\|\overrightarrow{AB}\right\|\times\left\|\overrightarrow{CD}\right\|\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=\sqrt{5^2+1^2}\times\sqrt{4^2+2^2}\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=\sqrt{520}\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$
$$=2\sqrt{130}\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)$$

On a également : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$, donc :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=$ 5 x (-2) + (-1) x (-4) = -6

On a ainsi : $2\sqrt{130}\times\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=-6$

Et donc : $\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)=-\dfrac{6}{2\sqrt{130}}=-\dfrac{3}{\sqrt{130}}$

Et : $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right)\approx 105,3°$

## 2) Théorème de la médiane

**Propriété :** Soit deux points A et B et I le milieu du segment [AB].

Pour tout point M, on a : $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$

Démonstration :

$MA^2 + MB^2 = \left\|\overrightarrow{MA}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{MB}\right\|^2$

$= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2$

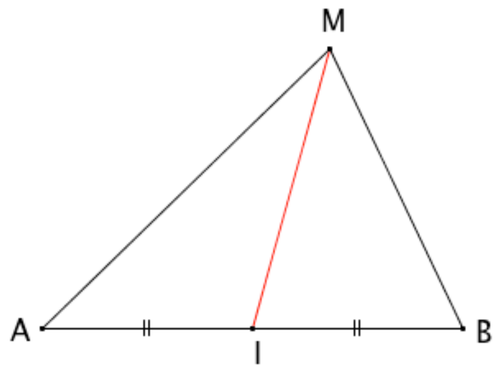
$= \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right)^2 + \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2$

$= \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB}^2$

$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right) + \overrightarrow{IA}^2 + \overrightarrow{IB}^2$

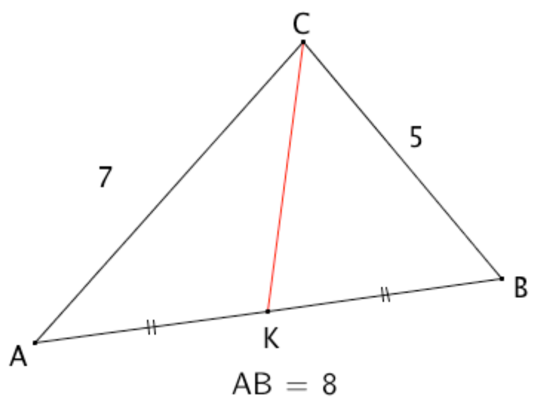
$= 2\overrightarrow{MI}^2 + 2\overrightarrow{MI}.\vec{0} + \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)^2$

$= 2MI^2 + \dfrac{AB^2}{2}$




Exemple :

**Vidéo** https://youtu.be/NATX4evtOiQ




On souhaite calculer la longueur de la médiane issue de C.
D'après le théorème de la médiane, on a :

$CA^2 + CB^2 = 2CK^2 + \dfrac{AB^2}{2}$, donc :

$CK^2 = \dfrac{1}{2}\left(CA^2 + CB^2 - \dfrac{AB^2}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2}\left(7^2 + 5^2 - \dfrac{8^2}{2}\right)$

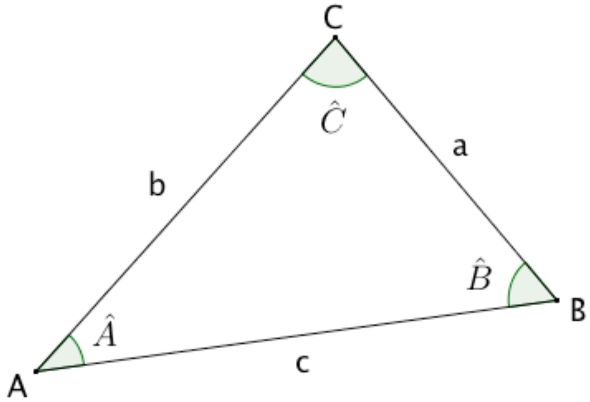
$= 21$

Donc : $CK = \sqrt{21}$.

3) Théorème d'Al Kashi

Théorème : Dans un triangle ABC, on a, avec les notations de la figure :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$$




Démonstration :

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{A} = bc\cos\widehat{A}$

et

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - BC^2\right) = \frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right)$

donc :

$\frac{1}{2}\left(b^2 + c^2 - a^2\right) = bc\cos\widehat{A}$

soit :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$

**Vidéo** https://youtu.be/-cQQAjHJ0Kc

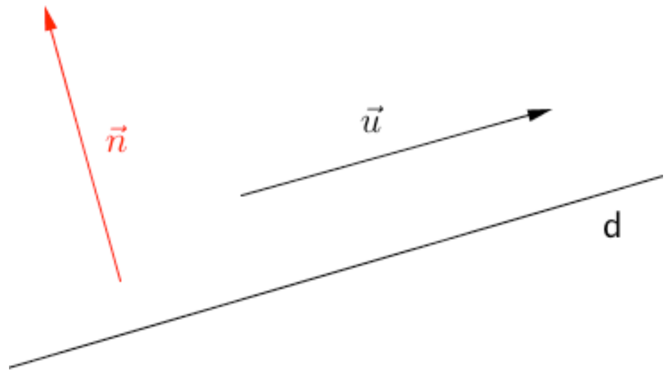
A Samarkand, le savant perse *Jemshid ibn Massoud al Kashi (1380 ; 1430)* vit sous la protection du prince *Ulugh-Beg* (1394 ; 1449) qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient la théologie et les sciences.
Dans son Traité sur le cercle (1424), *al Kashi* calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de $2\pi$ avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes :
$2\pi \approx 6{,}283\ 185\ 307\ 179\ 586\ 5$

## II. Equation de droite et équation de cercle

On se place dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan.

## 1) Equation de droite de vecteur normal donné

Définition : Soit une droite *d*.
On appelle vecteur normal à une droite *d*, un vecteur non nul orthogonal à un vecteur directeur de *d*.




Exemple :
Soit la droite *d* d'équation cartésienne $2x-3y-6=0$.
Un vecteur directeur de *d* est : $\vec{u}(3;2)$.
Un vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ de *d* est tel que : $\vec{u}.\vec{n}=0$
Soit : $3a+2b=0$.
$a$ = -2 et $b$ = 3 conviennent, ainsi le vecteur $\vec{n}(-2;3)$ est un vecteur normal de *d*.

Propriétés : - Une droite de vecteur normal $\vec{n}(a;b)$ admet une équation cartésienne de la forme $ax+by+c=0$ où $c$ est un nombre réel à déterminer.
- Réciproquement, la droite *d* d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ admet le vecteur $\vec{n}(a;b)$ pour vecteur normal.

Démonstrations :
- Soit un point A$(x_A;y_A)$ de la droite *d*.
M$(x;y)$ est un point de *d* si et seulement si $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x_A \\ y-y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont orthogonaux.
Soit : $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
Soit encore : $a(x-x_A)+b(y-y_A)=0$
$ax+by-ax_A-by_A=0$.
- Si $ax+by+c=0$ est une équation cartésienne de *d* alors $\vec{u}(-b;a)$ est un vecteur directeur de *d*.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ vérifie : $-b\times a+a\times b=0$. Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Méthode : Déterminer une équation de droite connaissant un point et un vecteur normal

**Vidéo** https://youtu.be/oR5QoWCiDlo

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan, on considère la droite *d* passant par le point $A\left(-5;4\right)$ et dont un vecteur normal est le vecteur $\vec{n}\left(3;-1\right)$.

Déterminer une équation cartésienne de la droite *d*.

Comme $\vec{n}\left(3;-1\right)$ est un vecteur normal de *d*, une équation cartésienne de *d* est de la forme $3x-y+c=0$.

Le point $A\left(-5;4\right)$ appartient à la droite *d*, donc : $3\times\left(-5\right)-4+c=0$ et donc : $c=19$.
Une équation cartésienne de *d* est : $3x-y+19=0$.

## 2) Equation de cercle

Propriété : Une équation du cercle de centre $A\left(x_A;y_A\right)$ et de rayon $r$ est :

$$\left(x-x_A\right)^2+\left(y-y_A\right)^2=r^2$$

Démonstration :
Tout point $M\left(x;y\right)$ appartient au cercle de centre $A\left(x_A;y_A\right)$ et de rayon $r$ si et seulement $AM^2=r^2$.

Méthode : Déterminer une équation d'un cercle

**Vidéo** https://youtu.be/Nr4Fcr-GhXM

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan, on considère le cercle *C* de centre $A\left(4;-1\right)$ et passant par le point $B\left(3;5\right)$.
Déterminer une équation du cercle *C*.

Commençons par déterminer le carré du rayon du cercle *C* :

$r^2 = AB^2 = (3-4)^2 + (5-(-1))^2 = 37$

Une équation cartésienne du cercle *C* est alors : $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 37$.

Méthode : Déterminer les caractéristiques d'un cercle

**Vidéo** https://youtu.be/nNidpOAhLE8

Dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan, on considère l'ensemble $E$ d'équation :

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$.

Démontrer que l'ensemble $E$ est un cercle dont on déterminera les caractéristiques (centre, rayon).

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$

$(x^2 - 2x) + (y^2 - 10y) + 17 = 0$

$(x-1)^2 - 1 + (y-5)^2 - 25 + 17 = 0$

$(x-1)^2 + (y-5)^2 = 9$

L'ensemble $E$ est le cercle de centre le point de coordonnées (1 ; 5) et de rayon 3.

## III. Formules de trigonométrie

### 1) Formules d'addition

Propriété : Soit $a$ et $b$ deux nombres réels quelconques. On a :

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

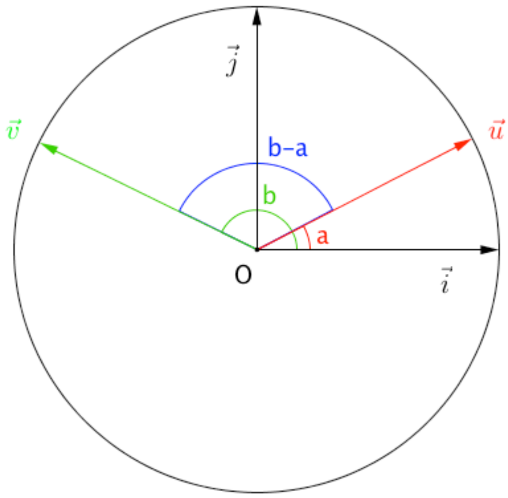
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

Démonstration :

**- 1ère formule :**

On considère un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$ du plan et le cercle trigonométrique de centre O.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de norme 1 tels que : $\left(\vec{i};\vec{u}\right)=a$ et $\left(\vec{i};\vec{v}\right)=b$.




On a alors : $\vec{u}\begin{pmatrix}\cos a\\ \sin a\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}\cos b\\ \sin b\end{pmatrix}$.

Ainsi : $\vec{u}.\vec{v}=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

On a également :

$\vec{u}.\vec{v}=\left\|\vec{u}\right\|\times\left\|\vec{v}\right\|\times\cos\left(\vec{u};\vec{v}\right)$

$=1\times 1\times\cos\left(b-a\right)=\cos\left(a-b\right)$

D'où $\cos\left(a-b\right)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

**- 2e formule :**

$\cos\left(a+b\right)=\cos\left(a-\left(-b\right)\right)=\cos a\cos\left(-b\right)+\sin a\sin\left(-b\right)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

**- 3e formule :**

$\sin\left(a-b\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(a-b\right)\right)$

$=\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}-a\right)+b\right)$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\cos b-\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)\sin b$

$=\sin a\cos b-\cos a\sin b$

**- 4e formule :**

$\sin\left(a+b\right)=\sin\left(a-\left(-b\right)\right)=\sin a\cos\left(-b\right)-\cos a\sin\left(-b\right)=\sin\cos b+\cos a\sin b$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules d'addition

**Vidéo** https://youtu.be/WcTWAazcXds

Calculer $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$.

$$\cos\frac{5\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{5\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{6}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

## 2) Formules de duplication

Propriété : Soit $a$ un nombre réel quelconque. On a :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\cos a\sin a$$

Démonstrations :
Cas particulier des 2e et 4e formules d'addition dans le cas où $a=b$ :

$$\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a$$
$$\sin(2a)=2\cos a\sin a$$

On a également : $\cos^2 a+\sin^2 a=1$ donc :

$$\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$$

Méthode : Calculer des valeurs de cos et sin à l'aide des formules de duplication

**Vidéo** https://youtu.be/RPtAUI3oLco

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

- $\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)=2\cos^2\frac{\pi}{8}-1$ donc $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

et donc : $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$, car $\cos\frac{\pi}{8}$ est positif.

- $\sin^2\frac{\pi}{8}=1-\cos^2\frac{\pi}{8}=1-\frac{2+\sqrt{2}}{4}=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$

et donc : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, car $\sin\frac{\pi}{8}$ est positif.

Méthode : Résoudre une équation trigonométrique

**Vidéo** https://youtu.be/yx3yULqR_wI

Résoudre dans $\left[0;2\pi\right]$ l'équation $\cos 2x = \sin x$.

$\cos 2x = \sin x$ soit $1 - 2\sin^2 x = \sin x$.
On pose $X = \sin x$, l'équation s'écrit alors : $1 - 2X^2 = X$
Soit : $2X^2 + X - 1 = 0$

$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 \times \left(-1\right) = 9$
L'équation du second degré possède deux solutions distinctes :
$X_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2}$ et $X_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1$

Résolvons donc dans $\left[0;2\pi\right]$ les équations : $\sin x = \dfrac{1}{2}$ et $\sin x = -1$ :

$\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$.

Ainsi : $S = \left\{\dfrac{\pi}{6};\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right\}$.