FONCTIONS POLYNOMES
(Partie 2)

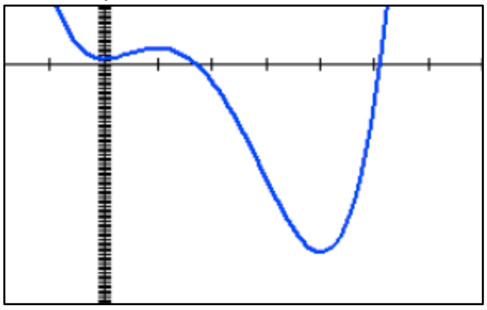
I. Fonctions polynômes du quatrième degré

Méthode : Étudier les variations d'une fonction polynôme du quatrième degré

Vidéo https://youtu.be/uKVKSAVEER4

Soit la fonction f définie sur [0 ; 5]. par $f(x)=1,5x^4-10x^3+12x^2+2$.
1) Démontrer que $f'(x)=6x(x-1)(x-4)$.
2) Déterminer le signe de f' en fonction de x.
3) Dresser le tableau de variations de f.
4) En déduire le minimum et le maximum de f sur [0 ; 5].

On trace la courbe de la fonction f à l'aide de la calculatrice :



1) On a :

$$f'(x)=1,5\times4\times x^3-10\times3\times x^2+12\times2\times x$$
$$=6x^3-30x^2+24x$$

Si $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$
Alors $f'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx+d$

Or :

$$6x(x-1)(x-4)=6x(x^2-4x-x+4)$$
$$=6x(x^2-5x+4)$$
$$=6x^3-30x^2+24x$$
$$=f'(x)$$

2) On commence par résoudre l'équation $f'(x)=0$, soit : $6x(x-1)(x-4)=0$
On a trois solutions : $x=0$, $x=1$ et $x=4$.

On dresse un tableau de signes :

x	0		1		4		5
$6x$	0	+	|	+	|	+	
$x-1$		−	0	+	|	+	
$x-4$		−	|	−	0	+	
$f'(x)=6x(x-1)(x-4)$		+	0	−	0	+	

3) On dresse alors le tableau de variations :

x	0		1		4		5
f'		+	0	−	0	+	
f	2	↗	5,5	↘	-62	↗	-10,5

En effet :

$f(0)=1{,}5\times 0^4-10\times 0^3+12\times 0^2+2=2$

$f(1)=1{,}5\times 1^4-10\times 1^3+12\times 1^2+2=5{,}5$

$f(4)=1{,}5\times 4^4-10\times 4^3+12\times 4^2+2=-62$

$f(5)=1{,}5\times 5^4-10\times 5^3+12\times 5^2+2=-10{,}5$

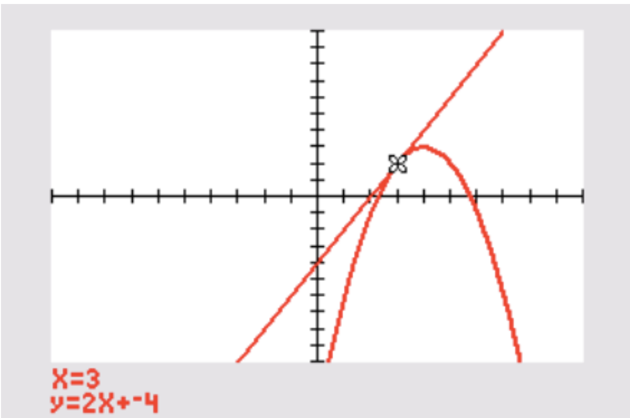
4) Sur [0 ; 5], le minimum de f est égal à -62. Il est atteint pour $x=4$.
Le maximum de f est égal à 5,5. Il est atteint pour $x=1$.

II. Tangente en un point de la courbe

Méthode : Déterminer avec la calculatrice une équation d'une tangente à une courbe

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-x^2+8x-13$.
A est un point de la courbe d'abscisse 3.
1) Donner une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A.
2) Tracer la tangente en A.

1) À l'aide de la calculatrice, il est possible de tracer la tangente à une courbe en un point et d'afficher son équation.



Une fois la courbe tracée sur la calculatrice, saisir :

Sur TI: Touches « 2nde » + « PGRM » (Dessin) puis « 5: Tangente » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « ENTER ».

Sur Casio : Touches « SHIFT » + « F4 » (Skech) puis « Tang » et saisir l'abscisse du point de tangence, ici 3. Puis « EXE » + « EXE ».

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse 3 est $y = 2x - 4$.

2) On a l'équation de la tangente :

$$y = 2x - 4$$

- -4 est son ordonnée à l'origine.
- 2 est son coefficient directeur.

Pour la fonction, 2 est appelé le **nombre dérivé**.
Et on a : $f'(3) = 2$

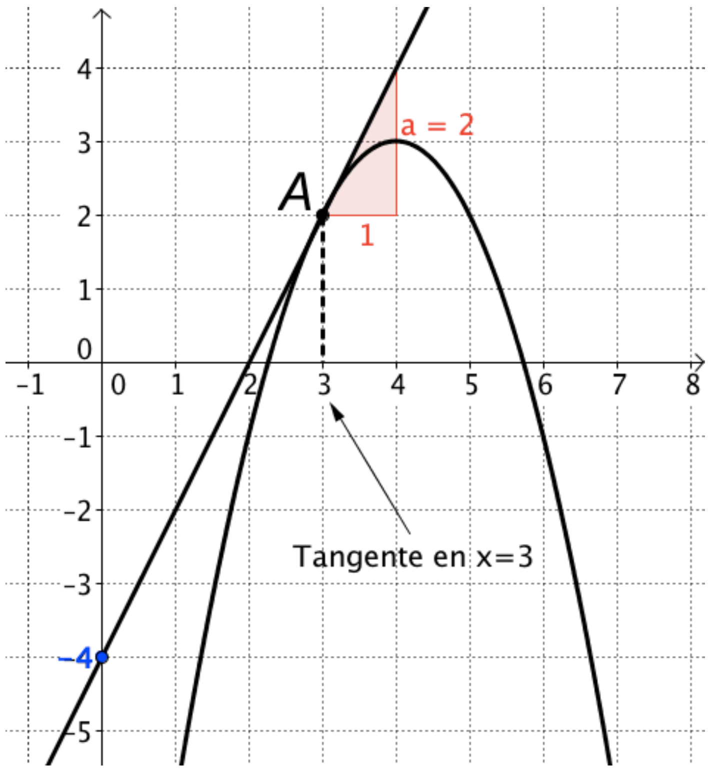
On peut ainsi retrouver le coefficient directeur de la tangente par calcul :

$f(x) = -x^2 + 8x - 13$

$f'(x) = -2x + 8$

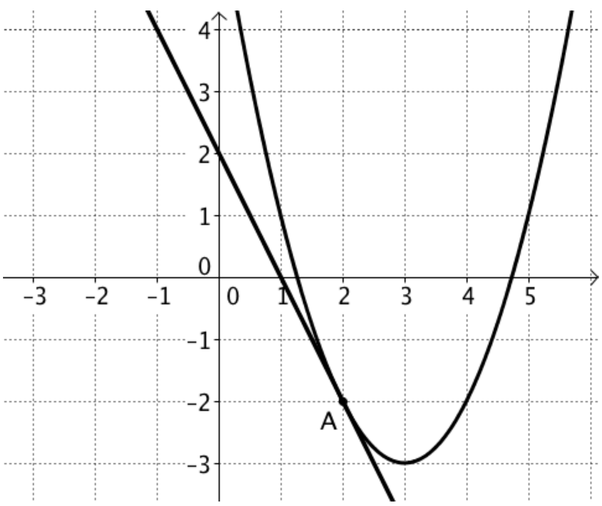
Le nombre dérivé en 3 est :

$f'(3) = -2 \times 3 + 8 = 2$



Méthode : Déterminer graphiquement une équation d'une tangente à une courbe

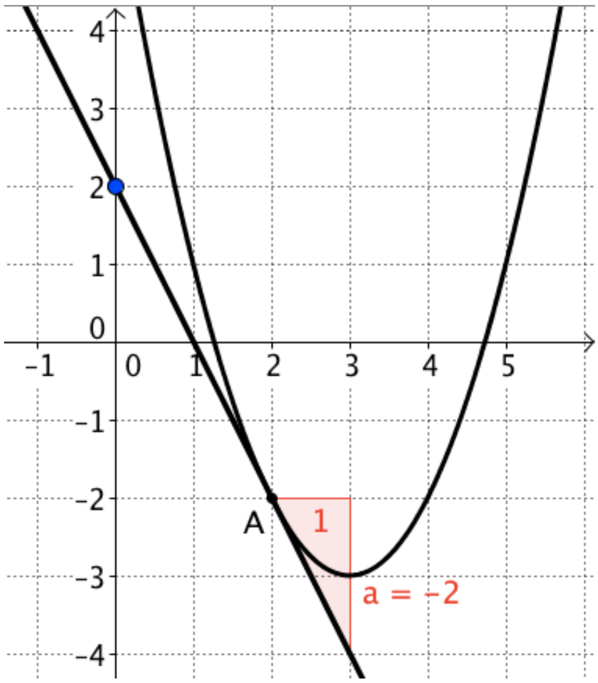
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction f.
On a représenté sa tangente au point A d'abscisse 2.
1) Déterminer le nombre dérivé de f en $x = 2$.
2) En déduire une équation de la tangente au point A d'abscisse 2.



1) $f'(2) = -2$

2) L'ordonnée à l'origine de la tangente est égale à 2.

Une équation de la tangente est donc :
$y = -2x + 2$



III. Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Méthode : Résoudre graphiquement une équation ou une inéquation

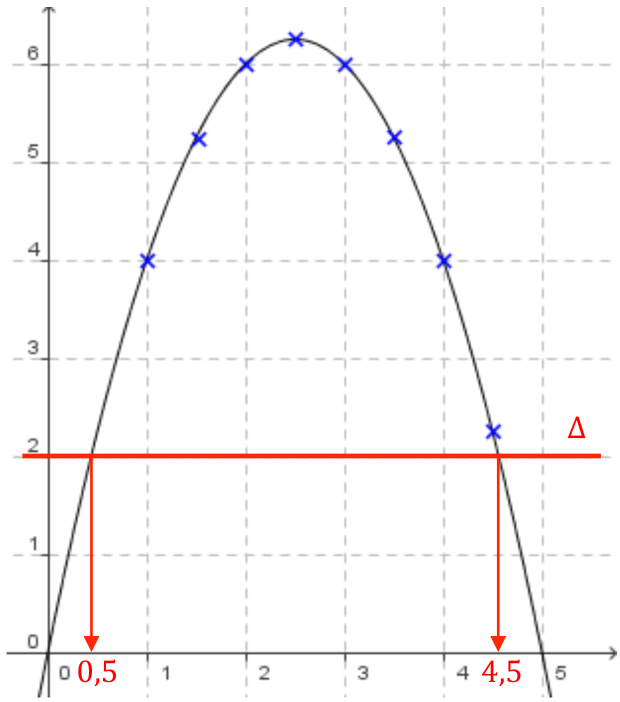
Vidéo https://youtu.be/FCUd2muFEyI

Résoudre : 1) $5x - x^2 = 2$ 2) $5x - x^2 > 2$

1) On représente la fonction f définie par : $f(x) = 5x - x^2$.
On détermine les abscisses des points d'intersection de la courbe avec la droite Δ parallèle à l'axe des abscisses passant par le point (0 ; 2).
On lit graphiquement que l'équation $5x - x^2 = 2$ admet pour solutions les nombres 0,5 et 4,5.

2) Résoudre l'inéquation $5x - x^2 > 2$ revient à déterminer les abscisses des points de la courbe pour lesquels la courbe est au-dessus de la droite Δ.

On lit que l'inéquation $5x - x^2 > 2$ admet pour solutions tous les nombres de l'intervalle [0,5 ; 4,5].



Remarques :

a) Par lecture graphique, les solutions obtenues sont approchées.
b) L'équation $A(x) = 7$, par exemple, n'a pas de solution car dans ce cas la droite Δ ne coupe pas la courbe.