

LE PAYS MAUDIT



Commentaire : Etude d'un exemple de marche aléatoire.

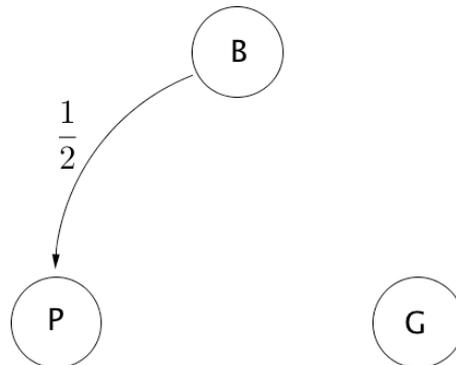
Au *Pays Maudit*, la météo est assez simple : soit il fait beau (noté B), soit il pleut (noté P) ou soit il grêle (noté G).

Le temps passe d'un état à un autre en respectant invariablement les règles suivantes :

- S'il fait beau un jour, il ne fera pas beau le lendemain et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il grêle.
- S'il pleut ou s'il grêle, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

1) S'il grêle aujourd'hui, quel temps fera-t-il demain ? Répondre en utilisant un arbre de probabilité.

2) Compléter le graphe probabiliste ci-dessous résumant la situation :



3) On note b_n , p_n et g_n les probabilités respectives qu'au n ème jour il fasse beau avec une probabilité b_n , qu'il pleuve avec une probabilité p_n et qu'il grêle avec une probabilité g_n . Construire un arbre de probabilité résumant les probabilités de transition du jour n au jour $n + 1$.

4) a) On note $J_n = \begin{pmatrix} b_n \\ p_n \\ g_n \end{pmatrix}$ la matrice colonne des probabilités au jour n .

Déterminer la matrice de transition T telle que $J_{n+1} = TJ_n$.

b) Vérifier que $T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ puis donner une interprétation de ce résultat.

c) À l'aide d'un produit matriciel, prévoir le temps du surlendemain.

5) a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, calculer les premières puissances de la matrice de transition et vérifier que ces puissances semblent converger vers la matrice

$$\text{limite} \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

b) En admettant ce résultat, en déduire le temps au *Pays Maudit* à longue échéance.

Exercice inspiré d'un travail du Groupe Graphes de l'Irem de Strasbourg



Hors du cadre de la classe, aucune reproduction, même partielle, autres que celles prévues à l'article L 122-5 du code de la propriété intellectuelle, ne peut être faite de ce site sans l'autorisation expresse de l'auteur.

www.maths-et-tiques.fr/index.php/mentions-legales