NOMBRE DERIVÉ

I. Limite en zéro d'une fonction

Exemples :

1) Soit la fonction f définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{(x+1)^2-1}{x}$.

L'image de 0 par la fonction f n'existe pas. On s'intéresse cependant aux valeurs de $f(x)$ lorsque x se rapproche de 0.

x	-0,5	-0,1	-0,01	-0,001	…	0,001	0,01	0,1	0,5
$f(x)$	1,5	1,9	1,99	1,999	?	2,001	2,01	2,1	2,5

On constate que $f(x)$ se rapproche de 2 lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de f lorsque x tend vers 0 est égale à 2 et on note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=2$.

2) Soit la fonction g définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

A l'aide de la calculatrice, on constate que $g(x)$ devient de plus en plus grand lorsque x se rapproche de 0.
On dit que la limite de g lorsque x tend vers 0 est égale à $+\infty$ et on note :
$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=+\infty$.

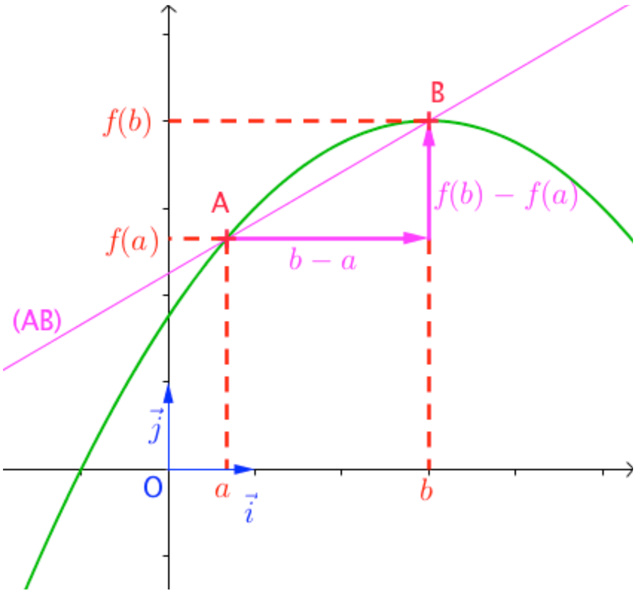
Définition : On dit que $f(x)$ a pour limite *L* lorsque x tend vers 0 si les valeurs de $f(x)$ peuvent être aussi proche de *L* que l'on veut pourvu que x soit suffisamment proche de 0.
On note : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=L$ et on lit : "La limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 est égale à *L*.

II. Dérivabilité

1) Rappel : Coefficient directeur d'une droite

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit deux réels a et b appartenant à I tels que $a < b$.
Soit A et B deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et b.

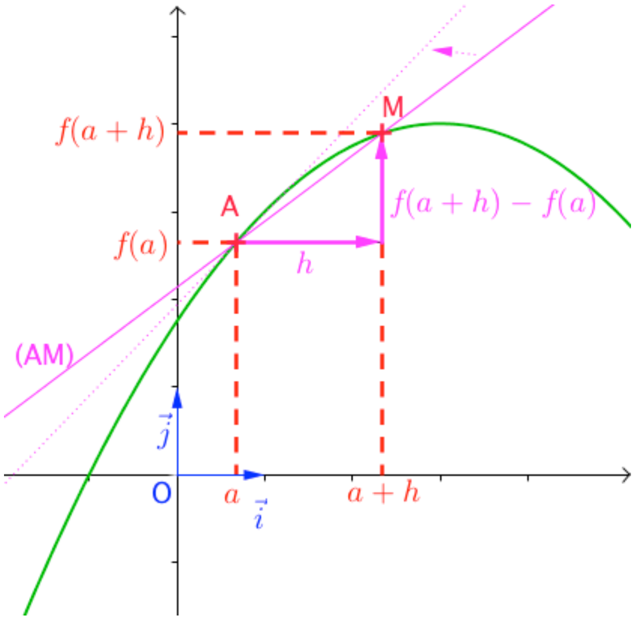
Le coefficient directeur de la droite (AB) est égal à : $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



2) Fonction dérivable

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Soit un réel a appartenant à I.
Soit A et M deux points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives a et $a+h$, avec $h \neq 0$.
Le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Lorsque le point M se rapproche du point A, le coefficient directeur de la droite (AM) est égal à la limite de $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ lorsque h tend vers 0.
Ce coefficient directeur s'appelle le nombre dérivé de f en a.



Définition : On dit que la fonction f est dérivable en a s'il existe un nombre réel L, tel que : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$.
L est appelé le nombre dérivé de f en a.

Méthode : Démontrer qu'une fonction est dérivable

Vidéo https://youtu.be/UmT0Gov6yyE
Vidéo https://youtu.be/lv5_mw1EYBE

1) Soit la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Démontrer que f est dérivable en $x = 2$.
2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x-5|$.
La fonction g est-elle dérivable en $x = 5$?

1) On commence par calculer $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$= \frac{(2+h)^2 + 2(2+h) - 3 - 2^2 - 2\times 2 + 3}{h}$$

$$= \frac{4 + 4h + h^2 + 4 + 2h - 8}{h}$$

$$= \frac{6h + h^2}{h} = h + 6$$

Donc : $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h + 6 = 6$

On en déduit que f est dérivable en $x = 2$. Le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.

2) On commence par calculer $\dfrac{g(5+h)-g(5)}{h}$ pour $h \neq 0$.

$$= \frac{|5+h-5| - |5-5|}{h}$$

$$= \frac{|h|}{h}$$

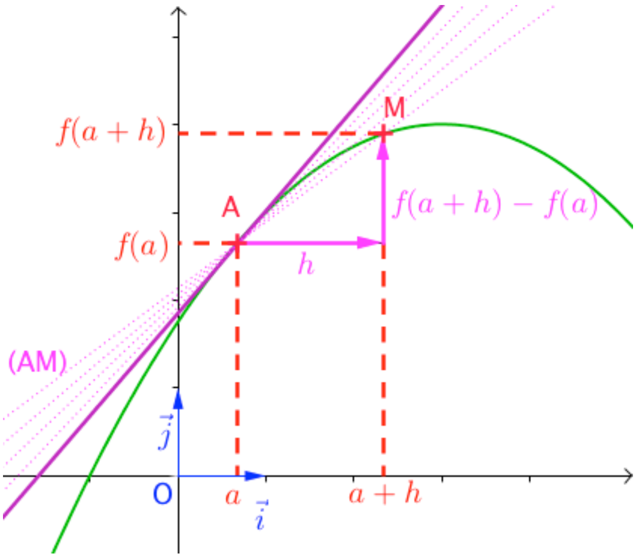
Donc : $\dfrac{g(5+h)-g(5)}{h} = \begin{cases} \dfrac{h}{h} = 1, \; pour \;\; h > 0 \\ \dfrac{-h}{h} = -1, \; pour \;\; h < 0 \end{cases}$

$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(5+h)-g(5)}{h}$ n'est pas égale à un unique nombre réel.
g n'est pas dérivable en $x = 5$.

III. Tangente à une courbe

Soit une fonction f définie sur un intervalle I et dérivable en un nombre réel a appartenant à I.
L est le nombre dérivé de f en a.
A est un point d'abscisse a appartenant à la courbe représentative C_f de f.

Définition : La tangente à la courbe C_f au point A est la droite passant par A de coefficient directeur le nombre dérivé *L*.

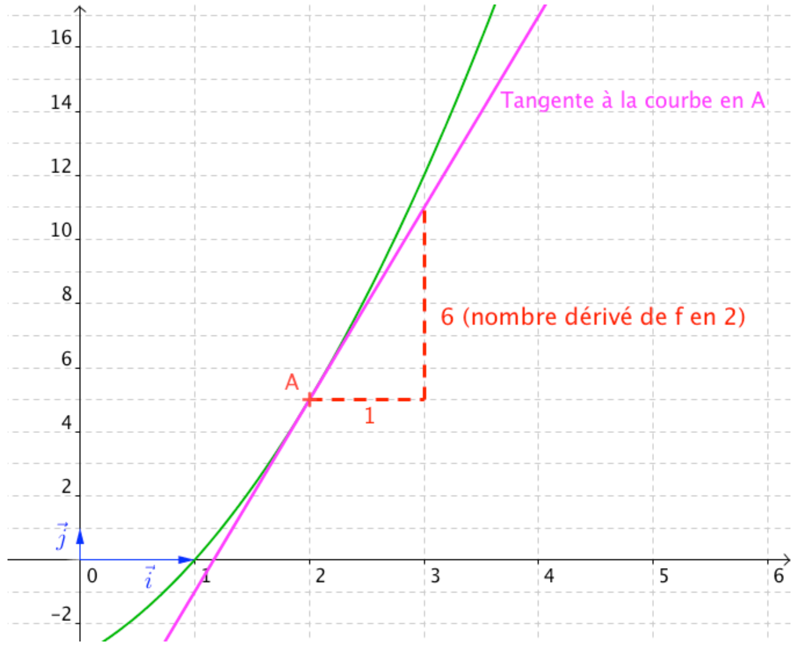


Méthode : Déterminer le coefficient directeur d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/0jhxK55jONs

On considère la fonction trinôme f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$ dont la dérivabilité en 2 a été étudiée plus haut.
Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu que le nombre dérivé de f en 2 vaut 6.
Ainsi la tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est la droite passant par A et de coefficient directeur 6.



Propriété : Une équation de la tangente à la courbe C_f en A est :

$$y = L(x-a) + f(a)$$

Démonstration :
La tangente a pour coefficient directeur *L* donc son équation est de la forme :
$y = Lx + b$ où b est l'ordonnée à l'origine.

Déterminons b :
La tangente passe par le point A$\left(a; f(a)\right)$, donc :
$f(a) = La + b$ soit : $b = f(a) - La$
On en déduit que l'équation de la tangente peut s'écrire :
$y = Lx + f(a) - La$
$y = L(x-a) + f(a)$

Méthode : Déterminer une équation d'une tangente à une courbe

Vidéo https://youtu.be/fKEGoo50Xmo
Vidéo https://youtu.be/7-z62dSkkTQ

On considère la fonction trinôme *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.
Déterminer une équation de tangente à la courbe représentative de *f* au point A de la courbe d'abscisse 2.

On a vu plus haut que le coefficient directeur de la tangente est égal à 6.
Donc son équation est de la forme : $y = 6\left(x-2\right) + f(2)$, soit :

$y = 6(x-2) + 2^2 + 2\times 2 - 3$

$y = 6x - 7$

Une équation de tangente à la courbe représentative de f au point A de la courbe d'abscisse 2 est $y = 6x - 7$.