NOMBRES COMPLEXES
(Partie 2)

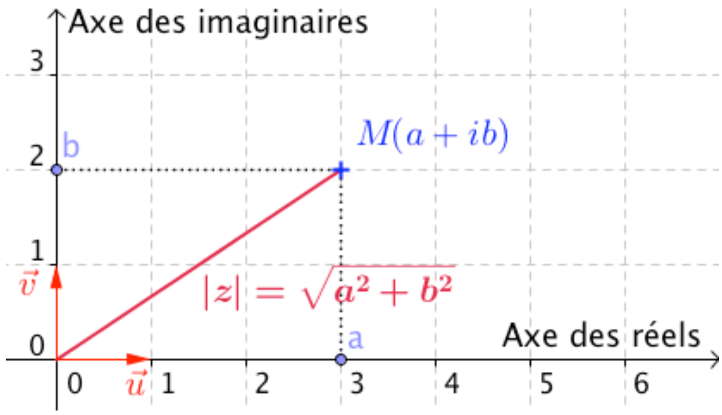
Dans tout le chapitre, on munit le plan d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{u}\;;\vec{v}\right)$.

I. Module et argument d'un nombre complexe

1) Module

Définition : Soit un nombre complexe $z = a + ib$.
On appelle module de z, le nombre réel positif, noté $|z|$, égal à $\sqrt{a^2+b^2}$.

M est un point d'affixe z.
Alors le module de z est égal à la distance OM.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes.

a) $|z|^2 = z\bar{z}$ b) $|\bar{z}| = |z|$ c) $|-z| = |z|$

Démonstrations :

a) $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$

b) $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

c) $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2+b^2} = |z|$

Méthode : Calculer le module d'un nombre complexe

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Calculer : a) $|3-2i|$ b) $|-3i|$ c) $\left|\sqrt{2}-i\right|$

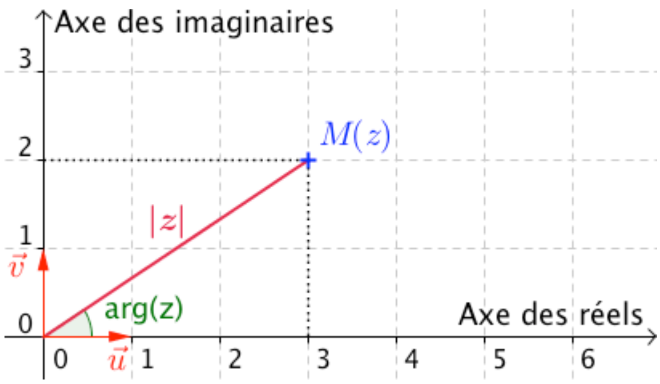
a) $|3-2i|=\sqrt{3^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$

b) $|-3i|=|-3|\times|i|=3\times 1=3$

c) $\left|\overline{\sqrt{2}-i}\right|=\left|\sqrt{2}-i\right|=\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2+(-1)^2}=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$

2) Argument

Définition : Soit un point M d'affixe z non nulle.
On appelle argument de z, noté arg(z) une mesure, en radians, de l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.



Remarques :
- Un nombre complexe non nul possède une infinité d'arguments de la forme $\arg(z)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$.

On notera $\arg(z)$ modulo 2π ou $\arg(z)\left[2\pi\right]$

- 0 n'a pas d'argument car dans ce cas l'angle $\left(\vec{u}\,;\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini.

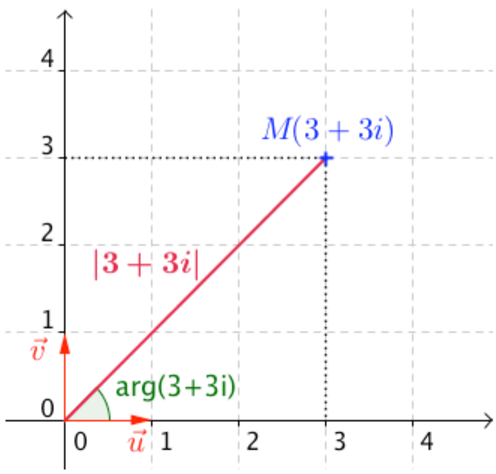
Exemple :

Vidéo https://youtu.be/Hu0jjS5O2u4

Soit $z=3+3i$.

Alors $|z|=|3+3i|=\sqrt{3^2+3^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Et $\arg(z)=\frac{\pi}{4}\left[2\pi\right]$.



Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul.

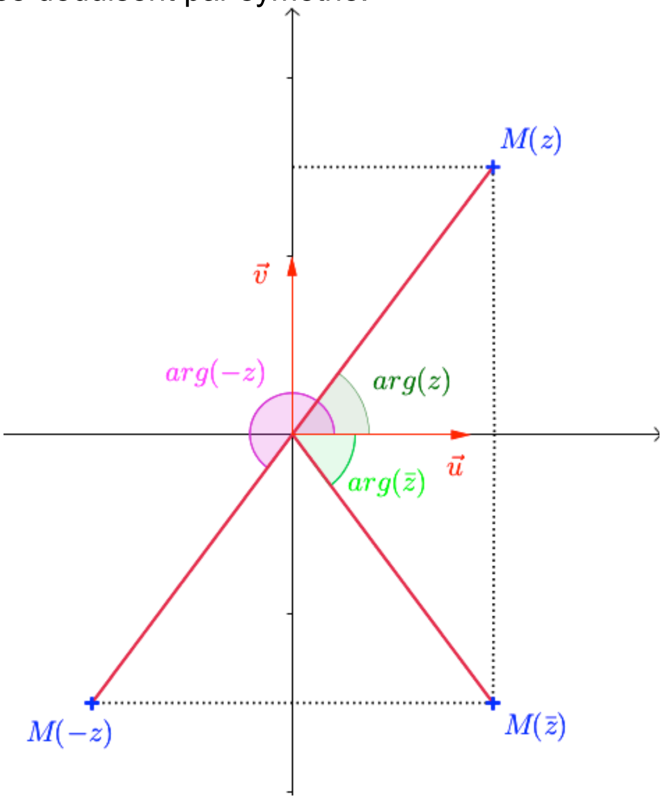
a) z est un nombre réel $\Leftrightarrow \arg(z)=0\left[\pi\right]$,

b) z est un imaginaire pur $\Leftrightarrow \arg(z)=\frac{\pi}{2}\left[\pi\right]$.

c) $\arg(\bar{z})=-\arg(z)$

d) $\arg(-z)=\arg(z)+\pi$

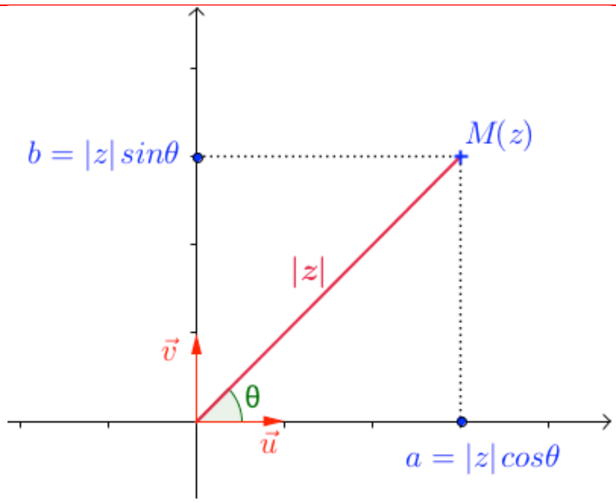
Démonstrations :
a) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des réels.
b) Le point M d'affixe z appartient à l'axe des imaginaires.
c) d) Ses résultats se déduisent par symétrie.



II. Forme trigonométrique d'un nombre complexe

1) Définition

Propriété : Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On pose : $\theta = \arg(z)$
On a alors : $a = |z|\cos\theta$ et $b = |z|\sin\theta$.



Définition : On appelle forme trigonométrique d'un nombre complexe z non nul l'écriture $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\theta = \arg(z)$.

Méthode : Ecrire un nombre complexe sous sa forme trigonométrique

Vidéo https://youtu.be/zlbpXlgISc4

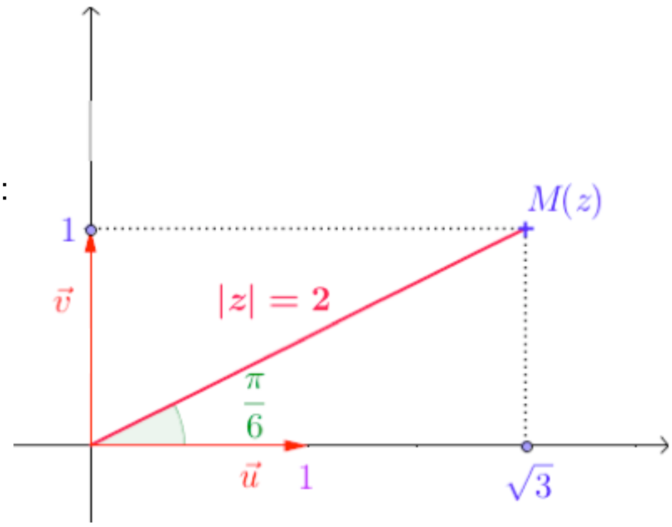
Ecrire le nombre complexe $z=\sqrt{3}+i$ sous sa forme trigonométrique.

- On commence par calculer le module de z :

$$|z|=\sqrt{3+1}=2$$

- En calculant $\frac{z}{|z|}$, on peut identifier plus facilement la partie réelle de z et sa partie imaginaire :

$$\frac{z}{|z|}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$$



On cherche donc un argument θ de z tel que :

$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta=\frac{1}{2}$.

Comme $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, on a :

$$\frac{z}{|z|}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$$

Donc :

$z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ avec $\arg(z)=\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

Avec une calculatrice ou un logiciel, il est possible de vérifier les résultats obtenus :

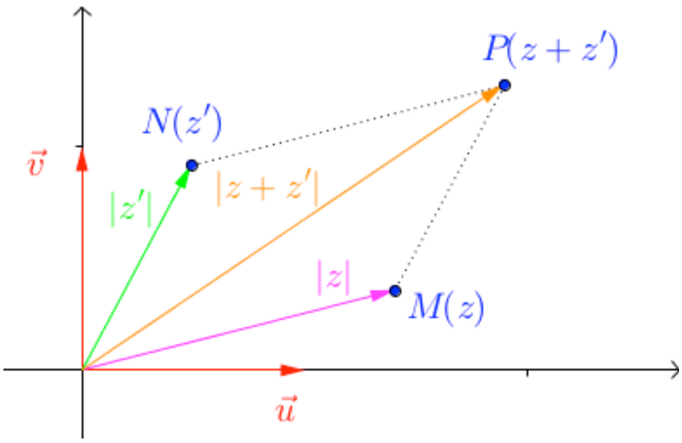
2) Propriétés

Inégalité triangulaire : Soit z et z' deux nombres complexes.

$$|z+z'|\leq|z|+|z'|$$

Démonstration :

Il s'agit d'une traduction de l'inégalité sur les distances.



Propriétés : Soit z et z' deux nombres complexes non nuls et n entier naturel non nul.		
Produit	$\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \lvert z'\rvert$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
Puissance	$\lvert z^n\rvert = \lvert z\rvert^n$	$\arg(z^n) = n\arg(z)$
Inverse	$\left\lvert \frac{1}{z}\right\rvert = \frac{1}{\lvert z\rvert}$	$\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
Quotient	$\left\lvert \frac{z}{z'}\right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration pour le produit :

On pose $\theta = \arg(z)$ et $\theta' = \arg(z')$.

$$zz' = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)|z'|(\cos\theta' + i\sin\theta')$$
$$= |z||z'|\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta')\right]$$
$$= |z||z'|\left[\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')\right]$$

Donc le module de zz' est $|z||z'|$ et un argument de zz' est $\theta + \theta' = \arg(z) + \arg(z')$.