LA SUITE DE FIBONACCI
ET LE NOMBRE D'OR

Commentaires :
Activité en trois parties pouvant constituer un devoir à la maison sur le thème du nombre d'or.
Sont abordés : les fractions, les racines carrées, un peu de calcul littéral, de la géométrie (constructions, théorème de Pythagore, …)

A. Suite de Fibonacci

Au XIIIe siècle, dans son traité mathématique *Liber Abaci*, le mathématicien *Fibonacci* pose le problème suivant :
« Combien de couples de lapins obtiendrons-nous à la fin de l'année si, commençant avec un couple, chacun des couples produisait chaque mois un nouveau couple lequel deviendrait productif au second mois de son existence ? »
Les réponses constituent les nombres de la suite de *Fibonacci* : *1 - 1 - 2 - 3 - 5 - 8 - 13 - 21 - ...*

1) Expliquer ce résultat et compléter la suite de nombres de *Fibonacci* pour 1ère année.

2) Calculer les valeurs approchées à 10^{-3} près des quotients de deux nombres successifs de la suite de *Fibonacci* $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \ldots$ et comparer les résultats avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, le *Nombre d'Or.*

B. Fractions à tous les étages

1) Calculer la valeur exacte des quotients suivants :

$$A_1 = 1 + \frac{1}{2} \qquad A_2 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \qquad A_3 = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}$$

2) Calculer la valeur exacte des quotients A_4, A_5 et A_6.
3) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près des résultats et comparer avec le *Nombre d'Or.*

C. Quelques égalités concernant le Nombre d'Or

1) Prouver que φ est une solution de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

2) Même question avec l'équation $\frac{1}{x} - x + 1 = 0$.

D. Le Nombre d'Or en géométrie

Les deux parties qui suivent sont indépendantes.

1ère partie :

1) AIJD est un carré de côté 10 cm. M est le milieu de [DJ] et C est le point de la demi-droite [DJ) tel que MI = MC.
B est le point tel que ADCB soit un rectangle.
Calculer la valeur exacte de la longueur MI et en déduire la valeur exacte de la longueur du rectangle ADCB ?

2) Vérifier que le rapport « longueur sur largeur » du rectangle ADCB est égal à φ. Un tel rectangle est appelé *Rectangle d'Or*.

3) Prouver que IBCJ est un *Rectangle d'Or*.

2ème partie :

1) Quelle doit être la longueur d'un rectangle ABCD de largeur AD = 6 cm pour qu'il soit un *Rectangle d'Or* ? Donner la valeur exacte puis vérifier qu'une valeur approchée à 10^{-2} près centimètre est 9,71 cm.

2) Dessiner ce rectangle ABCD puis à l'intérieur les carrés AIJD, IBKL, KCNM, JNOP.
Dans chaque carré, tracer le quart de cercle de centre J, de rayon JD ; le quart de cercle de centre L, de rayon LI ; le quart de cercle de centre M, de rayon MK ; le quart de cercle de centre O, de rayon ON. Le résultat de la construction est une spirale appelée *Spirale d'Or*.

3) Prouver que la longueur de cette spirale est $3\sqrt{5}\pi$ cm.